

## نقاط ثابت مشترک در فضاهاى متریک احتمالی منجر

راضیه فرخزاد رستمی\*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۲/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۵/۰۳

### Common fixed points in Menger probabilistic metric spaces

Razieh Farokhzad Rostami\*

Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Gonbade Kavous University

Received: 5/7/2017

Accepted: 7/25/2017

**Abstract:** Fixed point theory of nonexpansive type single valued mappings provides techniques for solving a variety of applied problems in mathematical sciences and engineering. The aim of this paper is to prove the existence of coincidence points, coupled points and common coupled fixed points of nonexpansive type conditions satisfied by single valued maps which include both continuous and discontinuous mappings on Menger probabilistic metric spaces.

**Keywords:** Menger PM space, coupled point, coincidence point, common coupled fixed point, weak reciprocal and reciprocal continuity.

**چکیده:** قضیه نقطه ثابت نگاشت‌های چند مقدارى ناگسترده تکنیک‌هایی برای حل مسئله‌های کاربردی گوناگونی در علوم ریاضی و مهندسی ارائه می‌دهد. هدف از این پروژه اثبات وجود نقطه‌های منطبق، زوج نقطه‌ها و زوج نقطه‌های ثابت مشترک نگاشت‌های چندمقداری با شرایط ناگسترده می‌باشد که شامل نگاشت‌های پیوسته و ناپیوسته روی فضاهاى متریک احتمالی منجر می‌شود.

**کلمات کلیدی:** فضای متریک احتمالی منجر، نقطه منطبق، زوج نقطه ثابت مشترک، پیوستگی دوجانبه، پیوستگی دوجانبه ضعیف.

انقباضی ثابت کرد که به عنوان اصل انقباضی باناخ شناخته شده‌است. این قضیه، تکنیکی برای حل مسائل کاربردی گوناگون در علوم ریاضی و مهندسی می‌باشد. پس از آن تعداد زیادی از نویسندگان اصل انقباضی باناخ را تعمیم و به روش‌های مختلفی ادامه دادند.

در سال ۱۹۷۲، سگال<sup>۲</sup> و بارکا-رید<sup>۳</sup> [۱۶] اصل انقباضی باناخ از نوع احتمالی را ثابت کردند. در سال

#### ۱ مقدمه

قضیه نقطه ثابت نقش مهمی در کاربردهای شاخه‌های مختلف ریاضی بازی می‌کند. اصطلاح قضیه نقطه ثابت متریک به آن دسته از نتایج نظری نقطه ثابت اشاره دارد که در شرایط هندسی روی فضاهاى اساسی و نگاشت‌ها نقشی حیاتی دارند. در سال ۱۹۲۲، باناخ<sup>۱</sup> ریاضیدان لهستانی [۱]، نتیجه‌ای بسیار مهم در مورد نگاشت‌های

<sup>2</sup> Sehgal

<sup>3</sup> Bharucha-Reid

<sup>1</sup> Banach

(۴) برای همه  $a \cdot b, c \cdot d \in [0, 1]$  به طوری که

$$\Delta(a \cdot b) \leq \Delta(c \cdot d), \quad b \leq d \text{ و } a \leq c$$

برای مثال  $\Delta_p(a \cdot b) = ab$  یک  $T$ -نرم می‌باشد.

در بین همه مثال‌های مهم  $T$ -نرم، قابل ذکر است

که  $\Delta_m(a \cdot b) = \min\{a, b\}$  قوی‌ترین  $T$ -نرم می‌باشد.

**تعریف ۳.** ([۴]) یک نرم سه گانه  $\Delta$ ، از نوع  $H$  گفته

می‌شود هرگاه خانواده‌ی توابع  $\{\Delta^n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$  در  $t = 1$

هم‌پیوسته باشند که  $\Delta^n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta^1(t) = \Delta(t, t),$$

$$\Delta^n(t) = \Delta(t, \Delta^{n-1}(t)), \quad n = 2, 3, \dots$$

به عبارت دیگر

$$\forall \varepsilon \in (0, 1), \exists \delta \in (0, 1): t > 1 - \delta$$

$$\Rightarrow \Delta^n(t) > 1 - \varepsilon, \quad (n \geq 1)$$

بدیهی است که برای همه  $t \in [0, 1]$  و  $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta^n(t) \leq t.$$

**تعریف ۴.** ([۱۵]) سه تایی  $(X, F, \Delta)$  را که  $X$  یک

مجموعه‌ی ناتهی،  $\Delta$  یک  $T$ -نرم پیوسته و  $F$  یک

نگاشت از  $X \times X$  به توی  $\Lambda^+$  است، فضای متریک

احتمالی منجر (به‌طور خلاصه فضای  $PM$  منجر) گفته

می‌شود، هرگاه با فرض اینکه  $F_{p,q}$  مقدار  $F$  را در

$(p, q)$  نشان دهد، در شرایط زیر صدق کند:

•  $(PM_1)$  برای همه  $t > 0$  و  $p, q \in X$

$$. p = q \text{ اگر و تنها اگر } F_{p,q}(t) = 1$$

•  $(PM_2)$  برای همه  $t > 0$  و  $p, q \in X$

۲۰۱۰ اصل نقطه ثابت باناخ از نوع احتمالی برای

انقباض‌های غیرخطی توسط جیسک جاجیمسکی<sup>۱</sup> [۶]

ثابت شده‌است. همچنین قضیه نقطه ثابت در فضای

متریک احتمالی برای نگاشت‌های انقباضی دیگر توسط

بسیاری از ریاضی‌دانان بررسی شده‌است که می‌توان در

[۲، ۴، ۵، ۱۴، ۱۵] به آنها رجوع کرد.

در این مقاله سعی داریم قضایای فضای متریک را

به فضای متریک احتمالی منجر<sup>۲</sup> تعمیم و بعضی از

قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های تک‌مقداری از نوع

ناگسترده را ثابت کنیم. ابتدا بعضی از تعاریف و نتایج

اصلی در فضاهای متریک احتمالی که در این تحقیق به

کار می‌بریم را یادآوری می‌کنیم.

**تعریف ۱.** ([۵]) تابع  $f: (-\infty, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  یک

تابع توزیعی نامیده می‌شود هرگاه یک تابع نازولی و از

چپ پیوسته با  $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$  باشد. به علاوه اگر

$f(0) = 0$  آنگاه  $f$  یک تابع توزیعی فاصله نامیده

می‌شود. همچنین یک تابع توزیعی فاصله که

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 1$$

می‌شود. مجموعه‌ی همه توابع توزیعی فاصله را با  $\Lambda^+$

نشان می‌دهیم.

**تعریف ۲.** ([۵]) یک نرم سه گانه  $\Delta$  (ب‌طور خلاصه

$T$ -نرم)، یک عملگر دوتایی روی  $[0, 1]$  است که در

شرایط زیر صدق می‌کند:

$$(۱) \quad \Delta \text{ شرکت پذیر و جابجاپذیر باشد،}$$

$$(۲) \quad \Delta \text{ پیوسته باشد،}$$

$$(۳) \quad \text{برای همه } a \in [0, 1], \Delta(a, 1) = a$$

<sup>1</sup> Jacek Jachymski

<sup>2</sup> Menger

$$F(\varphi(t)) \geq \min\{g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t), F(t)\},$$

,  $t > 0$

آنگاه برای همه  $t > 0$ ,

$$F(\varphi(t)) \geq \min\{g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)\}.$$

برای  $\tilde{a} = (x, y), \tilde{b} = (u, v) \in X^2$  یک تابع توزیعی  $\tilde{F}$  از  $X^2$  به توی  $\Lambda^+$  معرفی می‌کنیم که برای هر  $t > 0$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{F}_{\tilde{a}, \tilde{b}}(t) = \min\{F_{x,u}(t), F_{y,v}(t)\}.$$

لم ۳. ([۸]) اگر  $(X, F, \Delta)$  یک فضای کامل  $PM$  منجر باشد، آنگاه  $(X^2, \tilde{F}, \Delta)$  یک فضای کامل  $PM$  منجر می‌باشد.

فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک باشد. یک نگاشت  $T: X \rightarrow X$  ناگسترده گفته می‌شود هرگاه برای همه  $x, y \in X$ ،  $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$  سیریک<sup>۱</sup> [۳] خود نگاشت‌های  $T$  روی  $X$  ناگسترده را بررسی و ثابت کرد که بعضی از قضایای نقطه ثابت برای چنین نگاشت‌هایی برقرار است.

در سال ۲۰۱۶ جاد<sup>۲</sup> به همراه همکارش [۷] مطالعه روی کلاسی از نگاشت‌های با شرط نوع ناگسترده که شامل دو شرط پیوستگی و ناپیوستگی به همراه پیوستگی دوجانبه ضعیف بود را تعمیم دادند.

در این مقاله، ما شرط نوع ناگستردهگی زیر را روی کلاس دو خودنگاشت  $f, T$  روی فضای  $PM$  منجر

$$F_{p,q}(t) = F_{q,p}(t).$$

•  $(PM_p)$  برای همه  $t, s > 0$  و  $p, q, r \in X$

$$F_{p,r}(s+t) \geq \Delta(F_{p,q}(s), F_{q,r}(t)).$$

تعریف ۵. ([۱۵]) یک دنباله  $\{x_n\}$  در فضای  $PM$  منجر  $X$  همگرا به نقطه  $x$  در  $X$  گفته می‌شود  $(x_n \rightarrow x)$ ، هرگاه برای هر  $\delta > 0$  و  $\lambda \in (0, 1)$  یک عدد صحیح  $N(\delta, \lambda) > 0$  وجود داشته باشد به طوری که برای همه  $n \geq N(\delta, \lambda)$ ،  $F_{x_n, x} > 1 - \lambda$ . دنباله را دنباله کوشی می‌نامیم هرگاه برای هر  $\delta > 0$  و  $\lambda \in (0, 1)$  عدد صحیح  $N(\delta, \lambda) > 0$  وجود داشته باشد به طوری که برای همه  $n, m \geq N(\delta, \lambda)$ ،  $F_{x_n, x_m} > 1 - \lambda$ . یک فضای  $PM$  منجر  $(X, F, \Delta)$  کامل گفته می‌شود هرگاه هر دنباله کوشی در  $X$  به یک نقطه در  $X$  همگرا باشد.

در ادامه فرض می‌کنیم  $\Phi$  مجموعه همه توابع  $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  باشد که برای هر  $t > 0$  در شرایط  $\varphi(t) < t$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$  صدق می‌کند.

لم ۱. ([۸]) فرض کنیم  $(X, F, \Delta)$  یک فضای  $PM$  منجر و  $\varphi \in \Phi$  باشد. اگر برای هر  $t > 0$ ,

$$F_{p,q}(\varphi(t)) = F_{p,q}(t),$$

آنگاه  $p = q$

لم ۲. ([۸]) فرض کنیم  $n \geq 1$  اگر

$$g_1, g_2, \dots, g_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], F \in \Lambda^+$$

و برای یک  $\varphi \in \Phi$  داشته باشیم:

<sup>1</sup> Ćirić  
<sup>2</sup> Jhade

معرفی کرد. کمی بعد، جانک<sup>۲</sup> [۹] مفهوم جابجایی ضعیف را با معرفی عبارت همسازی نگاشت‌ها تعمیم داد. پانت<sup>۳</sup> [۱۰] مفهوم  $R$ -جابجایی ضعیف را برای نگاشت‌های ناهم‌ساز معرفی کرد.

دو خودنگاشت  $f$  و  $g$  از یک فضای متریک  $(X, d)$ ،  $R$ -جابجایی ضعیف از نوع  $A_g$  نامیده می‌شود [۱۳]، هرگاه عدد حقیقی مثبت  $R$  وجود داشته باشد به طوری که برای همه  $x \in X$

$$d(ffx, gfx) \leq Rd(fx, gx).$$

به طور مشابه، دو خودنگاشت  $f$  و  $g$  از فضای متریک  $(X, d)$ ،  $R$ -جابجایی ضعیف از نوع  $A_f$  نامیده می‌شود [۱۳]، هرگاه عدد حقیقی مثبت  $R$  وجود داشته باشد به طوری که برای همه  $x \in X$

$$d(fgx, ggx) \leq Rd(fx, gx).$$

حال ما مفهوم شرط جابجایی ضعیف را برای یک جفت از نگاشت‌های تک‌مقداری در یک فضای  $PM$  منجر  $(X, F, \Delta)$  همانند [۷] معرفی می‌کنیم.

**تعریف ۹.** دو خودنگاشت  $f$  و  $g$  از فضای  $PM$  منجر  $(X, F, \Delta)$ ،  $R$ -جابجایی ضعیف از نوع  $(MA_g)$  نامیده می‌شود هرگاه عدد حقیقی مثبت  $R \geq 1$  وجود داشته باشد به طوری که برای هر  $t > 0$  و  $x \in X$

$$F_{ffx, gfx}(t) \geq RF_{fx, gx}(t).$$

در سال ۱۹۹۸، پانت [۱۱] مفهوم پیوستگی دوجانبه را برای جفت نگاشت‌های تک‌مقداری

$(X, F, \Delta)$  با شرط پیوستگی و پیوستگی دوجانبه ضعیف زیر به کار می‌بریم:

$$F_{Tx, Ty}(\varphi(t)) \geq a(x, y)F_{fx, fy}(t) + b(x, y)\min\{F_{fx, Tx}(t), F_{fy, Ty}(t)\} + c(x, y)\min\{F_{fx, fy}(t), F_{fx, Tx}(t), F_{fy, Ty}(t)\} \quad (1)$$

که

$$a(x, y), b(x, y), c(x, y) > 0.$$

به طوری که

$$\inf_{x, y \in X} (a(x, y) + b(x, y) + c(x, y)) = 1$$

**تعریف ۶.** فرض کنید  $f$  و  $g$  دو نگاشت از  $X$  به توی  $Y$  باشند. می‌گوییم  $f$  و  $g$  نقطه منطبق دارند هرگاه یک نقطه  $x$  در  $X$  وجود داشته باشد به طوری که  $fx = gx$ .

**تعریف ۷.** فرض کنید  $f$  و  $g$  دو خودنگاشت روی  $X$  باشند. گوییم  $x \in X$  یک نقطه ثابت مشترک  $f$  و  $g$  است هرگاه  $fx = gx = x$ .

**تعریف ۸.** اگر  $S$  و  $T$  دو نگاشت از فضای متریک  $(X, d)$  به توی خودش باشند، آن‌ها را همساز روی  $X$  می‌نامند هرگاه برای دنباله  $\{x_m\}$  و نقطه  $x$  در  $X$ ،

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Sx_m = \lim_{m \rightarrow \infty} Tx_m = x.$$

واضح است که اگر  $S$  و  $T$  همساز روی  $X$  باشند و برای

$$d(Sx, Tx) = 0, \quad x \in X$$

$$\oplus d(STx, TSx) = 0.$$

در سال ۱۹۸۲، سسیا<sup>۱</sup> [۱۷] مفهوم شرط جابجایی ضعیف را برای یک جفت از نگاشت‌های تک‌مقداری

<sup>2</sup> Jungek

<sup>3</sup> Pant

<sup>1</sup> Sessa

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = 2, x > 5 \\ 6, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

و

$$g(x) = \begin{cases} 2, & x = 2 \\ 11, & 2 < x \leq 5 \\ \frac{x+1}{2}, & x > 5 \end{cases}$$

تابع‌های  $H$  و  $D$  تعریف شده در زیر، تابع‌های توزیعی منجر می‌باشند:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

و

$$D(x) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$$

برای هر  $t > 0$ ، تابع  $F: X \times X \rightarrow \Lambda^+$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_{x,y}(t) = \begin{cases} H(t), & x = y \\ D\left(\frac{t}{d(x,y)}\right), & x \neq y \end{cases}$$

قرار می‌دهیم  $\Delta(a, b) = \min\{a, b\}$  آنگاه  $(X, F, \Delta)$  یک فضای  $PM$  منجر می‌شود. واضح است که  $f$  و  $g$  پیوسته دوجانبه ضعیف روی  $(X, F, \Delta)$  می‌باشند، اما پیوسته دوجانبه نیستند. قابل ذکر است که پیوستگی دوجانبه ضعیف به تنهایی وجود نقطه ثابت مشترک و یا حتی نقطه منطبق را تضمین نمی‌کند (به [۷] رجوع کنید).

## ۲ نقطه ثابت مشترک

**تعریف ۱۲.** فرض کنید  $f$  و  $g$  دو خودنگاشت روی فضای  $PM$  منجر  $(X, F, \Delta)$  باشند. آنگاه  $f$  و  $g$

کرد. در ادامه، ما تعریف مشابه آن ولی در یک فضای  $PM$  منجر  $X$  را داریم.

**تعریف ۱۰.** دو خودنگاشت  $f$  و  $g$  از فضای  $PM$  منجر  $X$  پیوسته دوجانبه هستند هرگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} f g x_n = f x$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} g f x_n = g x$  که  $\{x_n\}$  یک دنباله در  $X$  می‌باشد به طوری که برای یک  $x \in X$  داشته باشیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g x_n = x.$$

توجه کنید که یک جفت نگاشت که پیوسته دوجانبه هستند لزوماً پیوسته نمی‌باشند، حتی در نقطه ثابت مشترکشان (برای مثال رجوع کنید به [۱۱]).

اخیراً، پانت به همراه همکارانش [۱۲] پیوستگی دوجانبه را با معرفی مفهوم پیوستگی دوجانبه ضعیف برای جفت نگاشت‌های تک‌مقداری مشابه تعریف زیر ولی در فضای متریک  $(X, d)$  تعمیم داده‌اند.

**تعریف ۱۱.** دو خودنگاشت  $f$  و  $g$  از فضای  $PM$  منجر  $X$  پیوسته دوجانبه ضعیف می‌باشند هرگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} f g x_n = f x$  یا  $\lim_{n \rightarrow \infty} g f x_n = g x$  که  $\{x_n\}$  یک دنباله در  $X$  می‌باشد به طوری که برای یک  $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f g x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g f x_n = x$$

قابل توجه است که پیوستگی دوجانبه، پیوستگی دوجانبه ضعیف را نتیجه می‌دهد اما همان‌طور که در مثال زیر نشان داده شده است، عکس آن برقرار نیست.

**مثال ۱.** ([۷]) فرض کنید  $X = [2, 2^0]$  و  $d$  یک متر معمولی روی  $X$  باشد.  $f, g: X \rightarrow X$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

به طوری که  $F_{fx_{n+1},Tx_{n+1}}(t) < F_{fx_n,Tx_n}(t)$  آنگاه با توجه به معادله بالا داریم:

$$\begin{aligned} & F_{Tx_n,Tx_{n+1}}(\varphi(t)) \\ & \geq aF_{fx_n,Tx_n}(t) + (b+c)F_{fx_{n+1},Tx_{n+1}}(t) \\ & > (a+b+c)F_{fx_{n+1},Tx_{n+1}}(t) \\ & \geq F_{Tx_n,Tx_{n+1}}(t), \end{aligned}$$

که یک تناقض است، چون برای هر  $t > 0$ ،  $\varphi(t) < t$  بنابراین برای هر  $n$  داریم:

$$F_{fx_{n+1},Tx_{n+1}}(t) \geq F_{fx_n,Tx_n}(t), \quad t > 0 \quad (2)$$

همچنین با توجه به نامساوی (۱) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} & F_{y_{n+1},y_{n+2}}(\varphi(t)) \\ & \geq (a+b+c) \min\{F_{y_n,y_{n+1}}(t), F_{y_{n+1},y_{n+2}}(t)\}. \end{aligned}$$

از اینکه  $\varphi \in \Phi$  و لم ۲، برای هر  $t > 0$  داریم:

$$\begin{aligned} F_{y_{n+1},y_{n+2}}(\varphi(t)) & \geq (a+b+c) F_{y_n,y_{n+1}}(t) \\ & \geq F_{y_n,y_{n+1}}(t). \end{aligned}$$

بنابراین برای هر  $t > 0$ ،

$$F_{y_{n+1},y_{n+2}}(\varphi^{n+1}(t)) \geq F_{y_n,y_n}(t).$$

برای  $\delta > 0$  و  $\varepsilon \in (0, 1)$  چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{y_n,y_n}(t) = 1$$

به طوری که  $F_{y_n,y_n}(t) > 1 - \varepsilon$  همچنین براساس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$$

وجود دارد به طوری که برای  $N > 0$  به دست

می‌آوریم:

$$\begin{aligned} F_{y_{n+1},y_{n+2}}(\delta) & \geq F_{y_{n+1},y_{n+2}}(\varphi^{n+1}(t)) \\ & \geq F_{y_n,y_n}(t) > 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، برای همه  $t > 0$ ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{y_{n+1},y_{n+2}}(t) = 1.$$

حال باید ثابت کنیم که دنباله  $\{y_n\}$  یک دنباله

کوشی در  $X$  است. برای اثبات آن کفایت ثابت کنیم

همساز منجر گفته می‌شوند هرگاه برای هر  $t > 0$ ،  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{fgx_n,gfx_n}(t) = 1$  که  $\{x_n\}$  یک دنباله می‌باشد

به طوری که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} gx_n = x \in X.$$

**قضیه ۱.** فرض کنیم  $(X, F, \Delta)$  یک فضای  $PM$  منجر

کامل با  $-T$  نرم  $\Delta$  از نوع  $H$  باشد و  $T, f$  دو

خودنگاشت پیوسته دوجانبه ضعیف روی  $X$  باشند که

در معادله (۱) برای یک  $\varphi \in \Phi$  با شرط

$$T(X) \subseteq f(X) \text{ و } T \text{ صدق می‌کنند. آنگاه } f \text{ و } T$$

نقطه ثابت مشترک در  $X$  دارند اگر

(آ)  $f$  و  $T$  همساز منجر باشند یا

(ب)  $f$  و  $T$   $-R$  جابجایی ضعیف از نوع  $(MA_f)$

باشند یا

(پ)  $f$  و  $T$   $-R$  جابجایی ضعیف از نوع  $(MA_T)$

باشند.

**برهان:** فرض کنید  $x_n \in X$  چون

$$T(X) \subseteq f(X)$$

که  $y_n = fx_n = Tx_n$  در حالت کلی  $x_{n+1}$ ها را به

همین صورت انتخاب می‌کنیم به طوری که

$$y_{n+1} = fx_{n+1} = Tx_n$$

$$F_{Tx_n,Tx_{n+1}}(\varphi(t)) \geq a F_{fx_n,fx_{n+1}}(t)$$

$$+ b \min\{F_{fx_n,Tx_n}(t), F_{fx_{n+1},Tx_{n+1}}(t)\}$$

$$+ c \min\{F_{fx_n,fx_{n+1}}(t), F_{fx_n,Tx_n}(t), F_{fx_{n+1},Tx_{n+1}}(t)\}$$

$$\geq a F_{fx_n,Tx_n}(t)$$

$$+ b \min\{F_{fx_n,Tx_n}(t), F_{fx_{n+1},Tx_{n+1}}(t)\}$$

$$+ c \min\{F_{fx_n,Tx_n}(t), F_{fx_n,Tx_n}(t), F_{fx_{n+1},Tx_{n+1}}(t)\},$$

که  $a, b, c$  با توجه به  $(x_n, x_{n+1})$  ارزش‌گذاری

می‌شوند. فرض کنید برای یک  $n$ ،  $t > 0$  موجود باشد

$$\begin{aligned} & F_{y_n, y_{n+p+1}}(\delta) \\ & \geq \Delta(F_{y_n, y_{n+1}}(\delta - \varphi(\delta)), F_{y_{n+1}, y_{n+p+1}}(\varphi(\delta))) \\ & \geq \Delta(F_{y_n, y_{n+1}}(\delta - \varphi(\delta)), \Delta^p(F_{y_n, y_{n+1}}(\delta - \varphi(\delta)))) \\ & = \Delta^{p+1}(F_{y_n, y_{n+1}}(\delta - \varphi(\delta))). \end{aligned}$$

بنابراین برای همه  $k \geq 1$ ,

$$F_{y_{n+k}, y_n}(\delta) \geq \Delta^k(F_{y_{n+1}, y_n}(\delta - \varphi(\delta))).$$

با توجه به  $T$ -نرم بودن  $\Delta$  از نوع  $H$ ، برای یک  $\varepsilon \in (0, 1)$  یک  $\lambda \in (0, 1)$  وجود دارد به طوری که برای همه  $n \geq 1$  و  $t > 1 - \lambda$  و  $\Delta^n(t) > 1 - \varepsilon$  از طرف دیگر طبق  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{y_n, y_{n+1}}(\delta - \varphi(\delta)) = 1$  یک  $N_1(\varepsilon, \delta)$  وجود دارد به طوری که برای همه  $n > N_1(\varepsilon, \delta)$

$$F_{y_n, y_{n+1}}(\delta - \varphi(\delta)) > 1 - \lambda.$$

بنابراین برای همه  $k \geq 1$  و  $n > N_1(\varepsilon, \delta)$

$$F_{y_n, y_{n+k}}(\delta) > 1 - \varepsilon.$$

در نتیجه دنباله  $\{y_n\}$  یک دنباله کوشی در  $X$  می باشد. پس  $\{fx_n\}$  و  $\{Tx_n\}$  دنباله کوشی در  $X$  می باشند و از کامل بودن فضا نتیجه می شود که برای  $\lim_{n \rightarrow \infty} fx_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = p$   $p \in T$  چون  $f$  و  $T$  پیوسته دوجانبه ضعیف هستند، پس داریم  $\lim_{n \rightarrow \infty} fTx_n = fp$  یا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tfx_n = Tp$$

حال نتیجه را در سه حالت فرض قضیه ثابت می کنیم.

(آ) فرض می کنیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} fTx_n = fp$  با استفاده از همسازی منجر  $f$  و  $T$ ، برای همه  $t > 0$  به دست

$$\text{می آوریم } \lim_{n \rightarrow \infty} F_{fTx_n, Tfx_n}(t) = 1 \text{ برای } \delta > 0 \text{ داریم}$$

که برای هر  $\delta > 0$  و  $\varphi \in (0, 1)$  یک  $N(\varepsilon, \delta)$  وجود دارد به طوری که برای همه  $m > n \geq N(\varepsilon, \delta)$

$$F_{y_n, y_m}(\delta) > 1 - \varepsilon.$$

برای انجام آن، ابتدا می توان نامساوی زیر را برای همه  $k \geq 1$  با استقرای ریاضی ثابت کرد:

$$F_{y_{n+k}, y_n}(\delta) \geq \Delta^k(F_{y_{n+1}, y_n}(\delta - \varphi(\delta))). \quad (3)$$

اگر  $k = 1$

$$\begin{aligned} F_{y_{n+1}, y_n}(\delta) & \geq F_{y_{n+1}, y_n}(\delta - \varphi(\delta)) \\ & = \Delta(F_{y_{n+1}, y_n}(\delta - \varphi(\delta)), 1) \\ & \geq \Delta(F_{y_{n+1}, y_n}(\delta - \varphi(\delta)), F_{y_{n+1}, y_n}(\delta - \varphi(\delta))) \\ & = \Delta^1(F_{y_{n+1}, y_n}(\delta - \varphi(\delta))). \end{aligned}$$

حال فرض می کنیم (3) برای  $1 \leq k \leq p$  برقرار

است. برای  $k = p + 1$  داریم

$$\begin{aligned} & F_{y_{n+p+1}, y_n}(\delta) \\ & \geq \Delta(F_{y_{n+1}, y_n}(\delta - \varphi(\delta)), F_{y_{n+1}, y_{n+p+1}}(\varphi(\delta))). \end{aligned}$$

با توجه به معادله (2)، نامساوی

$$F_{y_{n+p+1}, y_n}(\delta) \geq F_{y_n, y_{n+1}}(\delta)$$

برقرار است. آنگاه

$$\begin{aligned} & F_{y_{n+1}, y_{n+p+1}}(\varphi(\delta)) \\ & = F_{Tx_n, Tx_{n+p}}(\varphi(\delta)) \geq a F_{fx_n, fx_{n+p}}(\delta) \\ & + b \min \{F_{fx_n, Tx_n}(\delta), F_{fx_{n+p}, Tx_{n+p}}(\delta)\} \\ & + c \min \{F_{fx_n, fx_{n+p}}(\delta), F_{fx_n, Tx_n}(\delta), F_{fx_{n+p}, Tx_{n+p}}(\delta)\} \\ & = a F_{y_n, y_{n+p}}(\delta) + b \min \{F_{y_n, y_{n+1}}(\delta), F_{y_{n+p}, y_{n+p+1}}(\delta)\} \\ & + c \min \{F_{y_n, y_{n+p}}(\delta), F_{y_n, y_{n+1}}(\delta), F_{y_{n+p}, y_{n+p+1}}(\delta)\} \\ & \geq a \Delta^p(F_{y_n, y_{n+p}}(\delta - \varphi(\delta))) + b F_{y_n, y_{n+1}}(\delta - \varphi(\delta)) \\ & + c \min \{\Delta^p(F_{y_n, y_{n+1}}(\delta - \varphi(\delta))), F_{y_n, y_{n+1}}(\delta - \varphi(\delta))\} \\ & \geq (a + b + c) \Delta^p(F_{y_n, y_{n+1}}(\delta - \varphi(\delta))) \\ & \geq \Delta^p(F_{y_n, y_{n+1}}(\delta - \varphi(\delta))). \end{aligned}$$

در نتیجه

می‌شود که  $Tp = fz$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} Tfx_n = fz$

از همسازی منجر  $f$  و  $T$ ،  $\lim_{n \rightarrow \infty} fTx_n = fz$

به‌دست می‌آید. چون  $Tfx_{n+1} = TTx_n$  و

$$TTx_n \rightarrow fz \text{ پس } Tfx_{n+1} \rightarrow fz$$

بنا به معادله (۲)،

$$\begin{aligned} F_{Tz, TTx_n}(\varphi(t)) &\geq a F_{fz, fTx_n}(t) \\ &+ b \min \{F_{fz, Tz}(t), F_{fTx_n, TTx_n}(t)\} \\ &+ c \min \{F_{fz, fTx_n}(t), F_{fz, Tz}(t), F_{fTx_n, TTx_n}(t)\}. \end{aligned}$$

با فرض  $n \rightarrow \infty$  نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} F_{Tz, fz}(\varphi(t)) &\geq a + (b+c) F_{fz, Tz}(t) \\ &\geq (a+b+c) F_{fz, Tz}(t), \end{aligned}$$

و بنابراین  $fz = Tz$  با همین روش، از همسازی

منجر  $f$  و  $T$  جابجایی آنها در نقطه انطباق به‌دست

می‌آید و در نتیجه  $fTz = Tfz = TTz = fTz$

مجدداً از معادله (۲) داریم:

$$\begin{aligned} F_{Tz, TTz}(\varphi(t)) &\geq a F_{fz, fTz}(t) \\ &+ b \min \{F_{fz, Tz}(t), F_{fTz, TTz}(t)\} \\ &+ c \min \{F_{fz, fTz}(t), F_{fz, Tz}(t), F_{fTz, TTz}(t)\} \\ &= (a+c) F_{fz, fTz}(t) \\ &+ b \geq (a+b+c) F_{fz, fTz}(t) \geq F_{fz, fTz}(t). \end{aligned}$$

بنابراین  $Tz = TTz = fTz$  به عبارت دیگر،

$Tz$  یک نقطه ثابت مشترک  $f$  و  $T$  می‌شود.

(ب) فرض می‌کنیم  $f$  و  $T$ ،  $R$ -جابجایی ضعیف از

نوع  $(MA_f)$  باشند. چون  $f$  و  $T$  پیوسته دوجانبه

ضعیف هستند، پس  $\lim_{n \rightarrow \infty} fTx_n = fp$  یا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tfx_n = T$$

$$1 \geq F_{Tfx_n, fp}(\delta)$$

$$\geq \Delta(F_{Tfx_n, fTx_n}(\varphi(\delta)), F_{fTx_n, fp}(\delta - \varphi(\delta))).$$

از فرض  $n \rightarrow \infty$  نتیجه می‌شود

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tfx_n = fp$$

و  $Tfx_{n+1} = TTx_n \rightarrow fp$  حال بنا به معادله (۲)،

$$\begin{aligned} F_{Tp, TTx_n}(\varphi(t)) &\geq a F_{fp, fTx_n}(t) \\ &+ b \min \{F_{fp, Tp}(t), F_{fTx_n, TTx_n}(t)\} \\ &+ c \min \{F_{fp, fTx_n}(t), F_{fp, Tp}(t), F_{fTx_n, TTx_n}(t)\}. \end{aligned}$$

اگر  $n \rightarrow \infty$  نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} F_{Tp, fp}(\varphi(t)) &\geq a + (b+c) F_{fp, Tp}(t) \\ &\geq F_{fp, Tp}(t). \end{aligned}$$

بنابراین  $fp = Tp$

چون  $\lim_{n \rightarrow \infty} TTx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} fTx_n = fp$  با همان

روش، از همسازی منجر  $f$  و  $T$ ، جابجایی آنها در

نقطه انطباق به‌دست می‌آید. بنابراین

$$fTp = Tfp = ffp = TTp.$$

حال با استفاده از معادله (۲) داریم:

$$\begin{aligned} F_{Tp, TTp}(\varphi(t)) &\geq a F_{fp, fTp}(t) \\ &+ b \min \{F_{fp, Tp}(t), F_{fTp, TTp}(t)\} \\ &+ c \min \{F_{fp, fTp}(t), F_{fp, Tp}(t), F_{fTp, TTp}(t)\} \\ &= (a+c) F_{fp, fTp}(t) + b \geq (a+b+c) F_{fp, fTp}(t) \\ &\geq F_{fp, fTp}(t). \end{aligned}$$

در نتیجه  $Tp = TTp = fTp$  به عبارت دیگر  $Tp$

یک نقطه ثابت مشترک  $f$  و  $T$  می‌باشد.

حال فرض می‌کنیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} Tfx_n = Tp$

چون  $T(X) \subseteq f(X)$ ، برای یک  $z \in X$  نتیجه



چون  $\lim_{n \rightarrow \infty} Tfx_n = fz$  و  $Tp = fz$  داریم  $Tfx_{n+1} = TTx_n$  و  $Tfx_n \rightarrow fz$  پس  $-R$  جابجایی ضعیف از نوع  $(MA_f)$  تابع های  $f$  و  $T$  نتیجه می دهد که برای همه  $t > 0$  اگر  $F_{fTx_n, TTx_n}(t) \geq Rf_{fTx_n, Tx_n}(t)$  ،  $t > 0$  اگر  $fTx_n \rightarrow fz$  داریم  $n \rightarrow \infty$

حال بنا به معادله (۲)،

$$F_{Tz, TTx_n}(\varphi(t)) \geq a F_{fz, fTx_n}(t) + b \min \{F_{fz, Tz}(t), F_{fTx_n, TTx_n}(t)\} + c \min \{F_{fz, fTx_n}(t), F_{fz, Tz}(t), F_{fTx_n, TTx_n}(t)\}.$$

با  $n \rightarrow \infty$  بدست می آوریم:

$$F_{Tz, fz}(\varphi(t)) \geq a + (b+c) F_{fz, Tz}(t) \geq (a+b+c) F_{fz, Tz}(t),$$

در نتیجه  $fz = Tz$  با همین روش،  $-R$  جابجایی ضعیف از نوع  $(MA_f)$  تابع های  $f$  و  $T$  برای همه  $t > 0$  نتیجه می دهد

$$F_{fTz, TTz}(t) \geq Rf_{fz, Tz}(t).$$

پس داریم

$$fTz = Tfx = TTz = ffz.$$

مجدداً از معادله (۲) بدست می آوریم:

$$F_{Tz, TTz}(\varphi(t)) \geq a F_{fz, fTz}(t) + b \min \{F_{fz, Tz}(t), F_{fTz, TTz}(t)\} + c \min \{F_{fz, fTz}(t), F_{fz, Tz}(t), F_{fTz, TTz}(t)\} = (a+c) F_{fz, fTz}(t) + b \geq (a+b+c) F_{fz, fTz}(t) \geq F_{fz, TTz}(t).$$

در نتیجه  $Tz = TTz = Tz$  پس  $Tz$  یک نقطه ثابت مشترک  $f$  و  $T$  می باشد.

فرض می کنیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} fTx_n = fp$   $-R$  جابجایی ضعیف از نوع  $(MA_f)$  برای تابع های  $f$  و  $T$  نتیجه می دهد که برای هر  $t > 0$ ،

$$F_{fTx_n, TTx_n}(t) \geq Rf_{fTx_n, Tx_n}(t)$$

اگر  $n \rightarrow \infty$  نتیجه می شود  $TTx_n \rightarrow fp$  حال با استفاده از معادله (۲) داریم:

$$F_{Tp, TTx_n}(\varphi(t)) \geq a F_{fp, fTx_n}(t) + b \min \{F_{fp, Tp}(t), F_{fTx_n, TTx_n}(t)\} + c \min \{F_{fp, fTx_n}(t), F_{fp, Tp}(t), F_{fTx_n, TTx_n}(t)\}.$$

با  $n \rightarrow \infty$  به دست می آوریم:

$$F_{Tp, fp}(\varphi(t)) \geq a + (b+c) F_{fp, Tp}(t) \geq (a+b+c) F_{fp, Tp}(t) \geq F_{fp, Tp}(t),$$

به عبارت دیگر  $Tp = fp$

مجدداً از  $-R$  جابجایی ضعیف از نوع  $(MA_f)$  داریم  $F_{TTp, fTp}(t) \geq Rf_{fp, Tp}(t)$  پس

$$TTp = fTp = Tfp = ffp.$$

بنا به معادله (۲) نتیجه می شود:

$$F_{Tp, TTp}(\varphi(t)) \geq a F_{fp, fTp}(t) + b \min \{F_{fp, Tp}(t), F_{fTp, TTp}(t)\} + c \min \{F_{fp, fTp}(t), F_{fp, Tp}(t), F_{fTp, TTp}(t)\} = (a+c) F_{fp, fTp}(t) + b \geq (a+b+c) F_{fp, fTp}(t) \geq F_{fp, TTp}(t)$$

در نتیجه  $Tp = TTp = fTp$  به عبارت دیگر  $Tp$  یک نقطه ثابت مشترک  $f$  و  $T$  می شود.

حال اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} Tfx_n = Tp$  چون  $T(X) \subseteq f(X)$ ، برای  $z \in X$  نتیجه می شود

چون  $\lim_{n \rightarrow \infty} Tfx_n = Tp$  اگر حال  
 برای یک  $z \in X$  نتیجه می‌شود  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} Tfx_n = fz$  و  $Tp = fz$   
 چون  $Tfx_{n+1} = TTx_n$  و  $Tfx_{n+1} \rightarrow fz$ ، در  
 نتیجه  $TTx_n \rightarrow fz$  پس  $R$ -جابجایی ضعیف از  
 نوع  $(MA_T)$  تابع‌های  $f$  و  $T$  برای همه  $t > 0$   
 بدست می‌دهد

$$F_{Tfx_n, ffz}(t) \geq Rf_{Tx_n, fz}(t).$$

با فرض  $n \rightarrow \infty$  نتیجه می‌گیریم  
 $ffz \rightarrow fz$  حال بنا به معادله (۲) داریم:

$$F_{Tz, TTz}(\varphi(t)) \geq a F_{fz, JTx_n}(t) + b \min \{F_{fz, Jz}(t), F_{fTx_n, TTz}(t)\} + c \min \{F_{fz, JTx_n}(t), F_{fz, Jz}(t), F_{fTx_n, TTz}(t)\}.$$

اگر  $n \rightarrow \infty$  داریم:

$$F_{Tz, fz}(\varphi(t)) \geq a + (b+c)F_{fz, Jz}(t) \geq (a+b+c)F_{fz, Jz}(t),$$

و بنابراین  $fz = Tz$  با همین روش،  $R$ -جابجایی  
 ضعیف از نوع  $(MA_T)$  تابع‌های  $f$  و  $T$  برای همه  
 $t > 0$  نتیجه می‌دهد  $F_{Tfz, ffz}(t) \geq Rf_{Tz, fz}(t)$

$$fTz = Tfz = TTz = ffz \text{ پس داریم}$$

دوباره از معادله (۲) داریم:

$$F_{Tz, TTz}(\varphi(t)) \geq a F_{fz, Jfz}(t) + b \min \{F_{fz, Jz}(t), F_{fTz, TTz}(t)\} + c \min \{F_{fz, Jfz}(t), F_{fz, Jz}(t), F_{fTz, TTz}(t)\} = (a+c)F_{fz, Jfz}(t) + b \geq (a+b+c)F_{fz, Jfz}(t) \geq F_{fz, Jfz}(t).$$

(پ) فرض می‌کنیم  $f$  و  $T$ ،  $R$ -جابجایی ضعیف از  
 نوع  $(MA_T)$  باشند. چون  $f$  و  $T$  پیوسته دوجانبه  
 ضعیف هستند، پس یا  $\lim_{n \rightarrow \infty} fTx_n = fp$  یا  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} Tfx_n = Tp$   
 اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} fTx_n = fp$  آنگاه  $R$ -جابجایی  
 ضعیف بودن تابع‌های  $f$  و  $T$  از نوع  $(MA_T)$  برای  
 همه  $t > 0$  به دست می‌دهد

$$F_{fTx_n, fTx_{n-1}}(t) = F_{fTx_n, fTx_n}(t) \geq Rf_{Tx_n, fx_n}(t).$$

اگر  $n \rightarrow \infty$  در نتیجه  $fTx_n \rightarrow fp$

حال با استفاده از معادله (۲) بدست می‌آوریم:

$$F_{Tp, TTp}(\varphi(t)) \geq a F_{fp, JTx_n}(t) + b \min \{F_{fp, Jp}(t), F_{fTx_n, TTp}(t)\} + c \min \{F_{fp, JTx_n}(t), F_{fp, Jp}(t), F_{fTx_n, TTp}(t)\}.$$

با  $n \rightarrow \infty$  داریم:

$$F_{Tp, fp}(\varphi(t)) \geq a + (b+c)F_{fp, Jp}(t) \geq (a+b+c)F_{fp, Jp}(t) \geq F_{fp, Jp}(t),$$

به عبارت دیگر،  $Tp = fp$ .

مجدداً از  $R$ -جابجایی ضعیف از نوع  $(MA_T)$   
 داریم  $F_{Tfp, ffp}(t) \geq Rf_{Tp, fp}(t)$  در نتیجه  
 $TTp = fTp = Tfp = ffp$  بنا به معادله (۲)،

$$F_{Tp, TTp}(\varphi(t)) \geq a F_{fp, JTp}(t) + b \min \{F_{fp, Jp}(t), F_{fTp, TTp}(t)\} + c \min \{F_{fp, JTp}(t), F_{fp, Jp}(t), F_{fTp, TTp}(t)\} = (a+c)F_{fp, JTp}(t) + b \geq (a+b+c)F_{fp, JTp}(t) \geq F_{fp, JTp}(t).$$

بنابراین  $Tp = TTp = fTp$  یعنی  $Tp$  یک نقطه  
 ثابت مشترک  $f$  و  $T$  می‌باشد.

بنابراین  $Tz = TTz = Tz$  یعنی  $Tz$  یک نقطه ثابت مشترک  $f$  و  $T$  می‌باشد. لذا برهان قضیه کامل می‌شود.  $\square$

## References

- [1] S. Banach, Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals, Fund. Math., 3 (1922) 133-181.
- [2] L.B. Ćirić, On some nonexpansive type mapping and fixed points, Indian J. Pure Appl. Math., 24 (1993) 145-149.
- [3] L.B. Ćirić, RP. Agarwal, B. Samet, Mixed monotone-generalized contractions in partially ordered probabilistic metric spaces, Fixed Point Theory Appl., 56 (2011).
- [4] O. Hadzić, A fixed point theorem in Menger spaces, Publ. Inst. Math. (Belgr.), 20 (1979) 107-112.
- [5] O. Hadzić, Z. Ovcin, Fixed point theorems in fuzzy metric and probabilistic metric spaces, Zb. Rad. Prir.-Mat. Fak., Ser. Mat., 24 (1994) 197-209.
- [6] J. Jachymski, On probabilistic  $\varphi$ -contractions on Menger spaces, Nonlinear Anal., 73 (2010) 2199-2203.
- [7] P.K. Jhade and A.S. Saluja, Common fixed points theorem for nonexpansive type single valued mappings, Int. J. Nonlinear Anal. Appl., 7 (2016) 45-51.
- [8] Jun Wu, Some fixed-point theorems for mixed monotone operators in partially ordered probabilistic metric spaces, Fixed Point Theory Appl., 49 (2011).
- [9] G. Jungck, Compatible mappings and common fixed point, Intern. J. Math. Math. Sci., 9 (1986) 771-779.
- [10] R.P. Pant, Common fixed points of non-commuting mappings, J. Math. Anal. Appl., 188 (1994) 436-440.
- [11] R.P. Pant, Common fixed points for contractive maps, J. Math. Anal. Appl., 1226 (1998) 251-258.
- [12] R.P. Pant, R.K. Bisht and D. Arora, Weak reciprocal continuity and fixed point theorems, Ann. Univ. Ferrara, 57 (2011) 181-190.
- [13] H.K. Pathak, Y.J. Cho and S.M. Kang, Remark on R-weak commuting mappings and common fixed point theorems, Bull. Korean Math. Soc., 34 (1997) 247-257.
- [14] B. Samet, M. Rajović, R. Lazović, R. Stojiljković, Common fixed-point results for nonlinear contractions in ordered partial metric spaces, Fixed Point Theory Appl., 71 (2011).
- [15] B. Schweizer, A. Sklar, Probabilistic Metric Spaces, North-Holland, New York, 1983.
- [16] VM. Sehgal, AT. Bharucha-Reid, Fixed points of contraction mappings on PM-spaces, Math. Syst. Theory, 6 (1972) 97-102.
- [17] S. Sessa, On a weak commutativity condition of mappings in fixed point consideration, Publ. Inst. Math., 32 (1982) 129-153.