

حل یک مسئله بهینه‌سازی غیر خطی، عدد صحیح و غیر محدب با استفاده از روش‌های محدب‌سازی مبتنی بر مجموعه منظم خاص

محمد رضا انصاری^{۱*}، فاطمه حسینی فرد^۲

۱. استادیار، گروه مهندسی برق، دانشکده فنی مهندسی، مرکز آموزش عالی شهرضا
۲. دانشجوی دکتری، گروه علوم و مهندسی آب، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۵/۰۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۸/۰۵

Solution of a mixed integer-nonlinear and non-convex optimization problem by convexification methods based on special ordered sets

Mohammad Reza Ansari^{1,*}, Fatemeh Hasanifard²

1. Assistant Professor, Faculty of Electrical Engineering, University of Shahreza
2. PhD Candidate, Department of Water Science and Engineering, Ferdowsi University of Mashhad

Received: 7/24/2017

Accepted: 10/27/2017

Abstract: This paper presents a convexification method for mixed integer-nonlinear problems (MINLP) that used mathematic approximations based on special ordered sets (SOS) to solve optimization problems. Many of the engineering problems contain binary variables and nonlinear constraints which leading to a MINLP problems. In addition, the objective function and the constraints some of these MINLP problems include non-convex functions. Solving non-convex MINLP problems is challenging and difficult for many algorithms and optimization methods. Economic dispatch with considering alternative current power flow equations (ACED problem) in electrical engineering is One of these problems. The proposed ACED problem in this paper includes both nonlinear and non-convex practical constraints as well as binary variables. As a result, this problem is a complex and non-convex MINLP problem. To solve this problem, a new solution method based on SOS approximation is presented. This method relaxes the nonlinear constraints of the model using a convex linear outer approximation based on the concept of special ordered sets (SOS). To show the effectiveness of the proposed solution method, it is tested on the well-known test systems and compared with several other recently published solution methods. These comparisons confirm the validity of the developed approach.

Keywords: non-convex MINLP problem, special ordered sets approximation, Economic dispatch, AC power flow equations.

چکیده: این مقاله یک روش محدب‌سازی مسائل غیرخطی عدد صحیح را ارائه می‌نماید که از تقریب‌های ریاضی مبتنی بر مجموعه منظم خاص جهت حل این مسائل بهینه‌سازی استفاده می‌نماید. بسیاری از مسائل مهم مهندسی متغیرهای دودویی را شامل شده و همچنین ساختاری غیرخطی دارند، در نتیجه به مسائل MINLP ختم می‌گردند. به علاوه، تابع هدف و محدودیت‌های بعضی از این مسائل توابع غیرمحدب را شامل می‌گردند. حل مسائل MINLP غیرمحدب برای بسیاری از روش‌ها و الگوریتم‌های بهینه‌سازی چالش برانگیز و سخت می‌باشد. یکی از این مسائل، مسئله پخش بار اقتصادی همراه با معادلات شبکه انتقال AC در مهندسی برق می‌باشد. مسئله ACED پیشنهادی، دربرگیرنده محدودیت‌های عملی غیرخطی و غیرمحدب و همچنین متغیرهای دودویی بوده، در نتیجه به یک مسئله MINLP غیرمحدب پیچیده ختم گردیده است. برای حل این مسئله یک روش حل تکرارپذیر مبتنی بر SOS پیشنهاد می‌گردد. در این الگوریتم در هر تکرار با استفاده از مفاهیم SOS، مسئله ACED به صورت تکه‌ای خطی تقریب زده شده و یک مدل تقریبی محدب از این مسئله به دست می‌آید. با حل این مسئله محدب‌سازی شده، یک نقطه شروع مناسب برای حل مسئله ACED غیرمحدب به دست می‌آید. برای نشان دادن کارایی روش حل پیشنهادی، الگوریتم بر روی چند سیستم استاندارد و شناخته شده تست گردیده و مقایسه نتایج با روش‌های حل ارائه شده در تحقیقات گذشته اعتبار روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: مسئله MINLP غیرمحدب، تبدیلات ریاضی SOS، توزیع اقتصادی، معادلات پخش بار AC

۱ مقدمه

بهینه‌سازی مابین خطی بودن و غیرخطی بودن نیست، بلکه بین محدب بودن و غیرمحدب بودن است».

بنابراین در راستای رسیدن به یک بهینه واقعی در مسائل غیرمحدب می‌توانیم با استفاده از تبدیل‌های ریاضی به محدب‌سازی بخش‌های غیرمحدب یک مسئله MINLP غیرمحدب بپردازیم. در مقالات اخیر [۳-۸] از بعضی از این تبدیل‌ها در محدب‌سازی مسائل غیرمحدب استفاده شده است.

در این مقاله حل مسئله بهینه‌سازی توزیع بار اقتصادی به‌عنوان یکی از مسائل کلیدی در بهره‌برداری از سیستم‌های قدرت امروزی مورد توجه قرار گرفته است. پخش بار اقتصادی در سیستم قدرت به این معناست که چگونه بار الکتریکی سیستم قدرت را بین نیروگاه‌های تولیدکننده توزیع کنیم، به نحوی که هزینه تولید واحدها کمینه شده و همچنین محدودیت‌هایی مانند حدود توان اکتیو نیروگاه‌ها نیز رعایت شود [۹]. هدف ED^۲ تنظیم بهینه شبکه قدرت است که این هدف از طریق بهینه کردن توابع ویژه تحت قیود خاص صورت می‌گیرد. اگر در حل مسئله ED معادلات پخش بار AC^۳ شبکه انتقال را هم در نظر بگیریم، به مسئله ACED می‌رسیم. همچنین با در نظر گرفتن شرایط واقعی و عملی بهره‌برداری، قیود دیگری نیز به این مسئله افزوده می‌شوند. برخی از این قیود که در مقالات اخیر در نظر گرفته شده‌اند عبارتند از اثر باز کردن شیرهای بخار، قید نقاط ممنوعه کاری (POZ)^۴،

امروزه بسیاری از مسائل مهم بهینه‌سازی دنیای مهندسی دربرگیرنده متغیرهای تصمیم دودویی و همچنین سیستم‌های غیرخطی هستند که به‌طور مستقیم در کیفیت حل این مسائل تأثیر می‌گذارند. همچنین برای بهینه کردن این متغیرهای دودویی و برآورده کردن محدودیت‌های غیرخطی با مشکلات زیادی مواجه می‌باشند. اکثر الگوریتم‌های بهینه‌سازی ارائه شده در مواجهه با مسائل MINLP با چالش روبه‌رو می‌شوند. در این میان وجود تابع هدف با محدودیت‌های غیرمحدب، به‌طور ویژه بر پیچیدگی فضای مسئله MINLP می‌افزاید. در اثر افزوده شدن مؤلفه‌های غیرمحدب به مسئله MINLP، تابع هدف دارای نقاط بهینه محلی زیادی می‌شود که پیدا کردن بهینه واقعی را برای انواع روش‌های عددی و هوشمند مشکل می‌سازد. وقتی مسئله‌ای نامحدب می‌شود، شرایط KKT^۱ دیگر برای پیدا کردن بهینه واقعی کافی نیست و به شرایط لازم تنزل می‌یابد، درحالی‌که در مسائل محدب، شرایط KKT برای بهینگی واقعی لازم و کافی است [۱]؛ بنابراین برای آنکه یک مسئله بهینه‌سازی به‌طورکلی بهینه گردد، مهم آن است که محدب باشد. این امر بدین علت است که هر نقطه بهینه محلی در مسئله محدب، همان بهینه واقعی است و تنها یک نقطه بهینه در مسائل محدب وجود دارد [۲]. همچنان که راکفلر ریاضیدان مشهور نیز در این زمینه می‌گوید «تفاوت بزرگ در

^۲ Economic Dispatch

^۳ Alternative Current

^۴ Prohibited Operating Zone

^۱ Karush Kuhn-Tucker

بودن آنهاست که با بزرگ شدن ابعاد مسئله بیشتر نمایان می‌گردد.

در این مقاله یک مدل کامل از ACED با در نظر گرفتن همه محدودیت‌های ذکر شده در نظر گرفته می‌شود. مدل ACED پیشنهادی همان‌طور که گفته شد، یک مسئله MINLP غیرمحدب می‌باشد. برای حل این مدل پیچیده، یک روش محدب‌سازی جدید مبتنی بر مجموعه منظم خاص SOS پیشنهاد گردیده است. در اینجا تابع هدف و محدودیت‌های غیرخطی و غیرمحدب را با استفاده از مفاهیم SOS خطی‌سازی نموده و با توجه به محدودیت‌های خطی شده محدب، مسئله ACED را حل نموده و متغیرهای پیوسته و دودویی را تعیین می‌نماییم. سپس جواب‌های به‌دست‌آمده را به‌عنوان نقطه شروع برای حل مسئله ACED غیرخطی و غیرمحدب در نظر می‌گیریم.

در قسمت دوم از مقاله، مدل پیشنهادی برای ACED ارائه و در قسمت سوم روش حل پیشنهادی بر اساس SOS ارائه گردیده است. در قسمت چهارم نیز نتایج حاصل از تست روش پیشنهادی برای یک سیستم قدرت نمونه مورد بحث قرار می‌گیرد. قسمت پنجم نیز به نتیجه‌گیری می‌پردازد.

۲ فرمول‌بندی مسئله ACED

تابع هدف مسئله ACED هزینه تولید برق می‌باشد که می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\text{Min } F_T(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^n F_i(P_i), \quad (1)$$

که این عبارت برابر است با مجموع هزینه تولید همه نیروگاه‌های حرارتی. $F_i(P_i)$ تابع (۱) هزینه تولید

واحدهای با چند سوخت مختلف و قیود ایمنی (محدوده ولتاژ شین‌های شبکه قدرت و حد بارگذاری خطوط انتقال) [۱۰]. با در نظر گرفتن همه این محدودیت‌ها، مدل پیشنهادی برای ACED، یک مسئله بهینه‌سازی غیرمحدب، غیرخطی، عدد صحیح و غیرهموار^۱ می‌باشد.

چندین روش بهینه‌سازی ریاضی مانند روش گرادیان [۱۱]، روش تکرار لامبدا [۱۲]، برنامه‌ریزی خطی [۱۳]، برنامه‌ریزی درجه‌دو [۱۴]، برنامه‌ریزی غیرخطی [۱۵]، الگوریتم رهاسازی لاگرانژ [۱۶] و برنامه‌ریزی پویا [۱۷] برای حل مسئله ED پیشنهاد شد. پیش‌فرض مورد نظر برای اکثر روش‌های ذکر شده، محدب بودن تابع هدف است که ممکن است برای مسئله ACED پیشنهاد مناسبی نباشد. به‌علاوه، این روش‌ها عموماً بهینه محلی پیدا می‌کنند، چرا که اگر حدس اولیه در نزدیکی یک کمینه محلی باشد، الگوریتم به آن نقطه همگرا خواهد شد. همچنین روش‌های مبتنی بر هوش مصنوعی نیز مانند الگوریتم ژنتیک [۱۸]، الگوریتم جستجوی تابو^۲ [۱۹]، شبکه عصبی هاپفیلد^۳ [۲۰]، بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها^۴ [۲۱]، انواع مختلف برنامه‌ریزی تکاملی [۲۲]، استراتژی تکاملی^۵ [۲۳]، بهینه‌سازی دسته ذرات^۶ [۲۴-۲۶] و جستجوی باکتریایی^۷ [۲۷] برای حل مسئله ED پیشنهاد شده‌اند. مشکل اساسی این روش‌ها نیز زمان‌بر

¹ Non-smooth

² Tabu Search

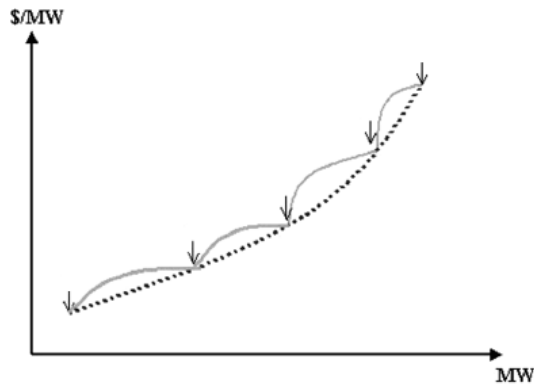
³ Hopfield neural network

⁴ Ant colony optimization

⁵ Evolutionary Strategy

⁶ Particle swarm optimization

⁷ Bacterial Foraging



شکل ۱. ظاهر شدن ریبِل در تابع هزینه با باز شدن هر شیر بخار

در این حالت تابع هزینه، شکل نامحدب و ناهموار به خود می‌گیرد. در اثر افزوده شدن مؤلفه سینوسی به تابع هزینه، تابع هدف دارای کمینه‌های محلی زیادی می‌شود که پیدا کردن بهینه کلی را برای انواع روش‌های تحلیلی و هوشمند مشکل می‌سازد.

از دیگر موارد چالش‌برانگیز در مدل‌سازی رفتار واقعی هزینه ژنراتورها هنگامی است که واحد دارای چند سوخت مختلف است. در این حالت تابع هزینه با چند قطعه تابع درجه‌دو به ازاء هر سوخت واحد حرارتی مدل‌سازی می‌شود:

توان P_i در شین ژنراتوری i و برحسب $\$/h$ است. این هزینه معمولاً به صورت تابع درجه‌دو از توان خروجی اکتیو ژنراتورها بیان می‌شود:

$$F_i(P_i) = a_i + b_i P_i + c_i P_i^2 \quad (2)$$

که a_i ، b_i و c_i ضرایب ثابت هزینه ژنراتور i می‌باشند. در عمل به دلیل بعضی از مسائل بهره‌برداری، تابع (۲) شکل پیچیده‌تری به خود می‌گیرد. یکی از این موارد هنگام مدل‌سازی هزینه واحدهایی است که توربین‌هایی با چند شیر بخار دارند. در این حالت با باز شدن هر شیر بخار، ریبِل‌هایی در شکل تابع هزینه ظاهر می‌شود. برای مدل‌سازی این ریبِل‌ها، یک عبارت سینوسی به تابع هزینه درجه‌دو اضافه می‌شود [۲۸]:

$$F_i(P_i) = a_i + b_i P_i + c_i P_i^2 + \left| e_i \sin(f_i (P_i^{\min} - P_i)) \right| \quad (3)$$

که e_i و f_i ضرایب ثابت اثر نقاط شیر است.

در شکل ۱ تابع هزینه درجه‌دو با نقطه‌چین و تابع هزینه با در نظر گرفتن اثر بارگذاری شیرها، با خط پر نشان داده شده است. شکل نشان می‌دهد که با باز شدن هر شیر بخار، یک ریبِل در تابع هزینه ژنراتور ظاهر می‌شود [۲۹].

$$F_i(P_i) = \sum_{m=1}^{M_i^i} \left[\left(a_{i,m} + b_{i,m} P_i + c_{i,m} P_i^2 + \left| e_{i,m} \sin(f_{i,m} (P_{i,m}^{\min} - P_i)) \right| \right) u_{i,m} \right] \quad (4)$$

$$\sum_{m=1}^{M_i^n} u_{i,m} P_{i,m}^{\min} \leq P_i \leq \sum_{m=1}^{M_i^n} u_{i,m} P_{i,m}^{\max} \quad (5)$$

$$\sum_{m=1}^{M_i^n} u_{i,m} = 1 \quad u_{i,m} \in \{0, 1\} \quad (6)$$

همان‌طور که نشان داده شده‌است، یک متغیر دودویی می‌باشد. در این رابطه m و i شمارنده سوخت و

در این رابطه $a_{i,m}$ ، $b_{i,m}$ ، $c_{i,m}$ و $e_{i,m}$ ضرایب هزینه را به ازاء هر سوخت خاص نشان می‌دهند. $u_{i,m}$ هم

می‌گردد. برای حذف متغیر دودویی $u_{i,m}$ از تابع هدف (۴) به صورت زیر عمل می‌نماییم:

$$F_i(P_i) = \sum_{m=1}^{M_i} \left[A_{i,m} + B_{i,m}P_i + C_{i,m}P_i^2 + \left| E_{i,m} \sin \left(f_{i,m} \left(P_{i,m}^{\min} - P_i \right) \right) \right| \right] \quad (۷)$$

واحد، یک‌سری نقاط ممنوعه‌کاری (POZ) تعریف می‌شود که مشخصه ورودی-خروجی واحد را ناپیوسته می‌کند. برای هر ژنراتور $ip \in IP \subset I$ دارای POZ، ناحیه مجاز عملیاتی به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۰]:

$$\sum_{\beta=1}^{N_{ip}^{POZ}+1} u_{ip,\beta} \cdot P_{ip}^{UB,\beta-1} \leq P_{ip} \leq \sum_{\beta=1}^{N_{ip}^{POZ}+1} u_{ip,\beta} \cdot P_{ip}^{LB,\beta} \quad (۱۴)$$

$$u_{ip,\beta} \in \{0,1\}$$

$$P_{ip}^{UB,0} = P_{ip}^{\min} \quad (۱۵)$$

$$P_{ip}^{LB,N_{ip}^{POZ}+1} = P_{ip}^{\max}$$

در اینجا اگر واحد ip در ناحیه امکان‌پذیر $[P_{ip}^{UB,\beta-1}, P_{ip}^{LB,\beta}]$ مورد بهره‌برداری قرار گیرد، $u_{ip,\beta} = 1$ و در غیر این صورت $u_{ip,\beta} = 0$ می‌باشد. همچنین ژنراتور ip با داشتن N_{ip}^{POZ} ناحیه ممنوعه، $N_{ip}^{POZ} + 1$ ناحیه کاری مجزا دارد که این ناحیه‌ها یک فضای حل ناپیوسته نامحدب را تشکیل می‌دهند. از آنجایی که حتماً واحد ip در یکی از این نواحی باید فعالیت نماید، محدودیت زیر نیز به مسئله اضافه می‌گردد:

ژنراتور هستند. در معادله بالا واحد i در هر محدوده‌ای که عمل نماید، متغیر دودویی مربوط به آن محدوده یعنی $u_{i,m} = 1$ و در غیر این صورت $u_{i,m} = 0$

$$a_{i,m} u_{i,m} \leq A_{i,m} \quad (۸)$$

$$b_{i,m} u_{i,m} \leq B_{i,m} \quad (۹)$$

$$c_{i,m} u_{i,m} \leq C_{i,m} \quad (۱۰)$$

$$e_{i,m} u_{i,m} \leq E_{i,m} \quad (۱۱)$$

در این حالت نیز بر پیچیدگی فضای مسئله افزوده می‌شود.

محدودیت‌های مدل پیشنهادی ACED را نیز می‌توان به صورت زیر دسته‌بندی نمود:

- محدودیت‌های نامساوی ژنراتورها که ناشی از محدودیت‌های فیزیکی آنها می‌باشد؛

- محدودیت توان اکتیو (توان مفید) (I تعداد ژنراتورها را نشان می‌دهد):

$$P_i^{\min} \leq P_i \leq P_i^{\max}, \quad i \in I \quad (۱۲)$$

- محدودیت توان راکتیو (توان غیرمفید):

$$Q_i^{\min} \leq Q_i \leq Q_i^{\max}, \quad i \in I \quad (۱۳)$$

در عمل به دلیل محدودیت‌های بهره‌برداری فیزیکی مانند بعضی نواقص در ژنراتورها یا دیگر تجهیزات واحد مانند بویلرها و پمپ‌های تغذیه، بهره‌برداری از یک ژنراتور ممکن است در بعضی از نقاط ممنوع شود، چرا که کار در این نواحی ممکن است سبب تقویت لرزش‌ها در محور توربین شده و باعث صدمه جدی در آن شود. در این حالت برای

محدودیت‌های فوق نیز خاصیت غیرخطی و غیرمحدوبی مسئله را به شدت افزایش می‌دهد.

– محدودیت ولتاژ شین‌ها

$$V_k^{\min} \leq V_k \leq V_k^{\max} \quad k \in N \quad (19)$$

– محدودیت ظرفیت هر خط انتقال l

$$BCL_l(V, \theta) = BF_l(V, \theta) - BF_l^{\max} \leq 0 \quad l \in L \quad (20)$$

L تعداد خطوط انتقال سیستم، $BF_l(V, \theta)$ یک تابع غیرخطی شامل جملات سینوسی براساس ولتاژ (V) و زاویه (θ) شین‌ها برای هر خط l و BF_l^{\max} حد بارگذاری و ظرفیت خط انتقال l را نشان می‌دهد.

۳ روش حل پیشنهادی بر مبنای SOS

به واسطه محدودیت‌های پخش بار AC محدودیت‌های دیگر، مسئله ACED پیشنهادی یک مدل غیرخطی و غیرمحدوب می‌باشد. به علاوه متغیرهای دودویی مربوط به واحدهای چند سوختی و نواحی ممنوعه در مسئله وجود دارد. با در نظر گرفتن همه این موارد، ACED پیشنهادی یک مسئله عدد صحیح مختلط، غیرخطی و غیرمحدوب پیچیده می‌گردد. برای حل این مسئله، یک روش محدب‌سازی بر اساس تبدیلات ریاضی SOS پیشنهاد گردیده است. در این الگوریتم با استفاده از مفاهیم SOS مدل ACED به صورت تکه‌ای خطی تقریب زده می‌شود. جزئیات روش در ادامه آمده است.

الگوریتم مجموعه منظم خاص

فرض می‌نماییم یک مسئله بهینه‌سازی MINLP به صورت زیر داریم:

$$\sum_{\beta=1}^{N_{ip}^{POZ}+1} u_{ip,\beta} = 1 \quad (16)$$

– معادلات پخش بار AC

– معادله پخش بار اکتیو در شین k

$$\begin{aligned} APB_k(P, V, \theta) &= \sum_{i \in S_k^i} P_i - Pload_k \\ &- V_k \sum_{n=1}^N V_n (G_{kn} \cos(\theta_k - \theta_n) + B_{kn} \sin(\theta_k - \theta_n)) \\ &= 0, \quad k \in N \end{aligned} \quad (17)$$

نشان‌دهنده مجموع توان اکتیو تولیدی

ژنراتورهای متصل به شین k ام، V ولتاژ شین، θ زاویه شین، $Pload_k$ بار اکتیو موجود در شین k ام، N تعداد شین‌های سیستم، G_{kn} و B_{kn} به ترتیب کندوکتانس و سوسپتانس (ضرایب ثابت) مربوط به خط انتقال مابین شین k و n را نشان می‌دهند.

– معادله پخش بار راکتیو در شین k

$$\begin{aligned} RPB_k(Q, V, \theta) &= \sum_{i \in S_k^i} Q_i - Qload_k \\ &- V_k \sum_{n=1}^N V_n (G_{kn} \sin(\theta_k - \theta_n) - B_{kn} \cos(\theta_k - \theta_n)) \\ &= 0, \quad k \in N \end{aligned} \quad (18)$$

در اینجا نیز $\sum_{i \in S_k^i} Q_i$ نشان‌دهنده مجموع توان راکتیو

تولیدی ژنراتورهای متصل به شین k ، V ولتاژ شین، θ زاویه شین، $Qload_k$ بار راکتیو موجود در شین k ام، N تعداد شین‌های سیستم، G_{kn} و B_{kn} به ترتیب کندوکتانس و سوسپتانس (ضرایب ثابت) مربوط به خط انتقال مابین شین k و n را نشان می‌دهند. در نظر گرفتن

نرخ همگرایی روش و همچنین افزایش کیفیت جواب‌های مسئله غیرمحدب می‌گردد.

در ادامه جزئیات روش تقریب SOS توابع غیرخطی و غیرمحدب بیان گردیده و همچنین $\tilde{f}(x)$ ، $\tilde{h}(x, z)$ و $\tilde{g}(x, z)$ در معادله (۲۲) معرفی می‌گردند.

تقریب SOS

تقریب SOS در سال ۱۹۷۰ به وسیله بیل و توملین [۳۱] معرفی گردید. آنها تقریب SOS را برای جایگزینی توابع غیرخطی با توابع تکه‌ای خطی این تابع‌ها ارائه نمودند. بسته به بُعد توابع غیرخطی، روش‌های مختلفی در این زمینه وجود دارد. برای تقریب SOS تابع غیرخطی یک‌بُعدی $d = w(x)$ در بازه $[L_x, U_x]$ یک تعداد ثابت q از نقاط شکست در بازه $[L_x, U_x]$ انتخاب می‌گردد. این نقاط شکست به وسیله x_i که $x_i \leq x_{i+1}$ و $L_x \leq x_i \leq U_x$ ، $1 \leq i \leq q$ نشان داده می‌شود. تقریب SOS از تابع d در دامنه $[x_i, x_{i+1}]$ یک تابع خطی است که دو نقطه $(x_i, w(x_i))$ و $(x_{i+1}, w(x_{i+1}))$ را به هم متصل می‌کند. در فرم ریاضی، تقریب SOS از تابع d که به وسیله \bar{d} نشان داده می‌شود، به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} \bar{d} = \bar{w}(x) &= \sum_{i=1}^q \lambda_i w(x_i) \\ x &= \sum_{i=1}^q \lambda_i x_i \\ \sum_{i=1}^q \lambda_i &= 1 \\ \lambda_i &\geq 0, \quad 1 \leq i \leq q \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{Min } & f(x), \\ \text{subject to } & \\ & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \\ & D_1 x + D_2 y \leq a \\ & x \in R^{nx}, \quad y \in \{0, 1\}^{ny} \end{aligned} \quad (21)$$

که $f: R^{nx} \rightarrow R$ ، $h: R^{nx} \rightarrow R^{nh}$ و $g: R^{nx} \rightarrow R^{ng}$ توابع غیرخطی و غیرمحدب می‌باشند. همچنین a یک بردار از مقادیر معلوم، D_1 ($na \times nx$) و D_2 ($na \times ny$) هم ماتریس‌هایی از مقادیر شناخته شده می‌باشند. x و y هم متغیرهای پیوسته و دودویی را به ترتیب نشان می‌دهند. در الگوریتم SOS پیشنهادی، مسئله MINLP غیرمحدب در تکرار F به یک مسئله MILP^۱ محدب به صورت زیر تبدیل می‌شود:

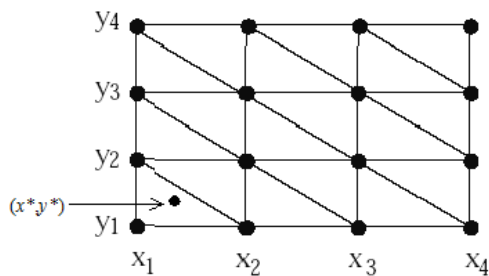
$$\begin{aligned} \text{Min } & \tilde{f}(x), \\ \text{subject to } & \\ & \tilde{h}(x) = 0 \\ & \tilde{g}(x) \leq 0 \\ & D_1 x + D_2 y \leq a \\ & x \in R^{nx}, \quad y \in \{0, 1\}^{ny} \end{aligned} \quad (22)$$

$\tilde{f}(x)$ ، $\tilde{h}(x)$ و $\tilde{g}(x)$ تقریب SOS از توابع غیرخطی و غیرمحدب $f(x)$ ، $h(x)$ و $g(x)$ می‌باشند.

با حل مسئله MILP بالا، جواب‌های به دست آمده برای متغیرهای پیوسته و دودویی به عنوان نقطه شروع برای حل مسئله MINLP غیرمحدب اصلی در هر تکرار در نظر گرفته می‌شود که این امر منجر به افزایش

¹ Mixed Integer Linear Programming

نقطه (x, y) را در شبکه دو بُعدی $q_x \times q_y$ احاطه می‌نماید، می‌باشد. شکل ۲ شبکه ساخته شده به وسیله ۴ نقطه شکست برای x و y که به مثلث‌هایی تقسیم‌بندی شده است را نشان می‌دهد. برای مثال نقطه (x^*, y^*) در شکل ۲ می‌تواند به وسیله ترم‌های مرتبط به رئوس (x_1, y_1) ، (x_2, y_1) و (x_1, y_2) و با استفاده از مقادیر $\lambda_{1,1}$ ، $\lambda_{2,1}$ و $\lambda_{1,2}$ به واسطه معادله (۲۴) نشان داده شود.



شکل ۲. شبکه دو بُعدی ساخته شده به وسیله ۴ نقطه شکست برای x و y و تقسیم شده به مثلث‌ها.

توابع با بیش از دو بُعد و جداناپذیر (n بُعدی) هم شبیه به توابع تک بُعدی و دو بُعدی می‌توانند با استفاده از q^n متغیر SOS از نوع $n+1$ تقریب زده شوند. (با q نقطه شکست برای هر یک از n بُعد). از آنجا که مسیر مشابه با تقریب SOS گفته شده برای توابع یک و دو بُعدی، برای توابع n بُعدی بسیار مشکل می‌باشد [۳۲]، این توابع ابتدا به چندین زیر تابع یک و دو بُعدی تجزیه می‌گردند و سپس تقریب SOS برای هر یک از این زیر توابع یک یا دو بُعدی به کار گرفته می‌شود. در اینجا با یک مثال این عمل شرح داده می‌شود. تابع ۴ بُعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$d(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2 x_3 \sin(x_4), \quad (25)$$

λ_{ij} متغیر پیوسته‌ای است که وضعیت SOS نوع ۲ را به شرح زیر بر آورده می‌نماید. برای نمایش دادن هر نقطه x ، حداکثر دو مقدار λ_{ij} برای SOS نوع ۲ باید غیر صفر بوده به صورتی که این λ_{ij} ها مرتبط با نقاط شکست کنار همی که نقطه x بین آنها واقع شده است، می‌باشند.

تقریب SOS می‌تواند برای توابع تقریب دو متغیره و غیرمجزا از هم نیز به کار گرفته شود. برای جایگزین کردن این تابع $d = w(x, y)$ تعریف شده در $x \in [L_x, U_x]$ و $y \in [L_y, U_y]$ با تقریب SOS، دو سری از نقاط شکست ثابت شده q_x و q_y در بازه‌های $[L_x, U_x]$ و $[L_y, U_y]$ به ترتیب تعریف می‌گردند. این نقاط شکست متناسب هستند با x_i که $1 \leq i \leq q_x, L_x \leq x_i \leq U_x$ و همچنین y_j که $1 \leq j \leq q_y, L_y \leq y_j \leq U_y$ و به صورت زیر فرموله می‌گردد:

$$d = w(x, y) = \sum_{i=1}^{q_x} \sum_{j=1}^{q_y} \lambda_{i,j} w(x_i, y_j)$$

$$x = \sum_{i=1}^{q_x} \sum_{j=1}^{q_y} \lambda_{i,j} x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{q_x} \sum_{j=1}^{q_y} \lambda_{i,j} y_j \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^{q_x} \sum_{j=1}^{q_y} \lambda_{i,j} = 1$$

$$\lambda_{i,j} \geq 0, 1 \leq i \leq q_x, 1 \leq j \leq q_y$$

در اینجا نیز λ_{ij} یک متغیر پیوسته است که SOS نوع ۳ را ارضا می‌نماید. برای نشان دادن هر نقطه (x, y) ، حداکثر ۳ مقدار λ_{ij} برای SOS نوع ۳ غیر صفر می‌باشد که این λ_{ij} مرتبط با سه رأس یک مثلثی که

برای اینکه تقریب MILP حاصل از یک مسئله MINLP به خود مسئله اصلی نزدیک باشد، نقاط شکست بکار گرفته شده برای هر متغیر x در تقریب SOS در هر تکرار باید به‌روزرسانی گردد. در این مقاله یک روش جدید برای این هدف در نظر گرفته شده است. در ادامه به‌طور خلاصه الگوریتم قدم‌به‌قدم را برای حل مسئله MINLP معادله (۲۱) توضیح می‌دهیم.

قدم ۱: مقداردهی اولیه تقریب SOS. یک تعداد از نقاط شکست هم‌فاصله به‌صورت اولیه برای هر متغیر پیوسته انتخاب می‌گردند و توابع غیرخطی و غیرمحدب $f(x)$ و $h(x, z)$ و $g(x, z)$ به زیرتوابع یک و دو بُعدی تجزیه می‌شوند (مانند آنچه در قسمت قبل توضیح داده شد) و تقریب SOS آنها یعنی $\tilde{f}(x)$ ، $\tilde{g}(x, z)$ و $\tilde{h}(x, z)$ تعیین می‌گردند. اگر زیرتوابع‌هایی که متغیر میانی بوده هم در قسمت‌های غیرخطی شرکت نموده‌اند (مانند ضرب s_2, s_3 در مثال قبلی که s_4 را می‌سازند)، یک تقریب SOS هم برای آنها نیز باید به‌کار گرفته شود (به‌طور مثال تقریب SOS برای s_2, s_3 با استفاده از یک تعداد نقاط شکست برای هر متغیر s_2 و s_3).

قدم ۲: حل مسئله MILP و MINLP در هر تکرار. ابتدا برنامه MILP به‌دست‌آمده بر اساس تقریب SOS (معادله (۲۲)) در قدم قبلی حل می‌گردد. توجه شود که در این مرحله توابع غیرخطی و غیرمحدب $f(x)$ و $h(x, z)$ و $g(x, z)$ به‌وسیله تقریب‌های خطی SOS آنها یعنی $\tilde{f}(x)$ ، $\tilde{h}(x, z)$ و $\tilde{g}(x, z)$ جایگزین گشته است. سپس برنامه اصلی یعنی مسئله

c_1 و c_2 مقادیر ثابت و x_1, \dots, x_4 متغیرهای تعریف شده می‌باشند. در ابتدا متغیرهای میانی s_i را در نظر گرفته و تجزیه تابع d را به‌صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 x_1^2 \\ s_2 &= c_2 x_2 x_3 \\ s_3 &= \sin(x_4) \\ s_4 &= s_2 s_3 \\ d &= s_1 + s_4 \end{aligned} \quad (26)$$

ذکر این نکته ضروری است که تجزیه فوق یکتا نیست. با استفاده از تقریب SOS از نوع یک و دو، هر زیرتوابع غیرخطی از معادله (۲۶) می‌تواند تقریب زده شود. تابع ۴ بُعدی d می‌تواند همچنین به‌صورت مستقیم با تقریب SOS نوع ۵ نیز تقریب زده شود. بدین منظور با در نظر گرفتن q نقطه شکست برای هر متغیر، SOS نوع ۵ به q^4 متغیر SOS نیازمند می‌باشد. در صورتی که با استفاده از تجزیه نشان داده شده در معادله (۲۶)، تعداد نقاط شکست به $2q^2 + 2q$ (q^2 برای s_2 و q^2 برای s_4 و s_1 برای q و s_3 برای کاهش می‌یابد. برای مثال با در نظر گرفتن ۴ نقطه شکست برای SOS نوع ۵، به ۲۵۶ متغیر SOS نیازمند می‌باشیم، در حالی که این تعداد به ۴۰ متغیر با استفاده از تجزیه معادله (۲۶) کاهش می‌یابد. با افزایش بُعد تابع d ، این اختلاف به سرعت افزایش می‌یابد. در نتیجه با استفاده از این راه ما می‌توانیم هر مسئله غیرخطی و غیرمحدب را با استفاده از روش تجزیه و تقریب SOS، تقریب بزنیم.

نحوه اجرای الگوریتم پیشنهادی SOS

نقاط شکست به دقیق‌تر شدن تقریب خطی توابع غیرخطی مسئله منجر گردد، که در نتیجه همگرایی به جواب بهینه تسریع بخشیده می‌شود. انتخاب یک تعداد کم از نقاط شکست برای هر متغیر پیوسته و افزایش هوشمندانه این نقاط شکست در هر گام به موفقیت الگوریتم کمک شایانی می‌نماید. در ادامه به گام ۲ برمی‌گردیم.

به‌کارگیری روش پیشنهادی برای حل مسئله ACED

برای حل مسئله ACED به‌وسیله الگوریتم SOS، ابتدا فرمول‌بندی آن را به‌صورت فرم مسئله MINLP معادله (۲۱) درمی‌آوریم. بردارهای y, x در (۲۱) برای ACED به‌صورت زیر می‌باشند:

$$y = \{u_{ip, \beta}, u_{i, m}\}, \quad (27)$$

$$i \in I, ip \in IP, \beta \in N_{ip}^{POZ} + 1, m \in M_{fl}^i$$

$$x = \{P_i, Q_i, \theta_n, V_n, A_{i, m}, B_{i, m}, C_{i, m}, E_{i, m}\}, \quad (28)$$

$$n \in N, i \in I$$

تابع هزینه (۷) در ACED تنها شامل متغیرهای پیوسته بوده و در فرم $f(x)$ از معادله (۲۱) می‌باشد. همچنین معادله (۲۰) در فرم $g(x) < 0$ و (۱۷) و (۱۸) در فرم $h(x) = 0$ می‌باشند. بقیه محدودیت‌های مسئله

ACED در فرم معادله خطی $D1.x + D2.y < a$ از

(۲۱) می‌باشند. تابع هزینه و محدودیت‌های غیرخطی

ACED از جمله (۷)، (۱۷)، (۱۸) و (۲۰) زیرتوابعی

غیرخطی در فرم $\cos(x), \sin(x), x^2$ و $x.y$ را

شامل می‌گردند. به‌عبارتی تابع هزینه و محدودیت‌های

غیرخطی به این زیرتوابع تجزیه گشته و با استفاده از

تقریب یک و دو بُعدی SOS نشان داده شده در (۲۳) و

(۲۴) خطی سازی می‌گردند و $\tilde{h}(x, z), \tilde{f}(x)$ و

MINLP معادله (۲۱) حل می‌گردد. در اینجا جواب‌های به‌دست‌آمده برای هر متغیر پیوسته x از حل مسئله MILP محدب، به‌عنوان نقطه شروع در حل مسئله MINLP غیرمحدب در هر تکرار در نظر گرفته می‌شود.

قدم ۳: وضعیت پایانی. با به‌دست آوردن کران پایین LB و کران بالا UB به‌صورت زیر وضعیت خاتمه تکرارها سنجیده می‌شود:

$$LB = \tilde{f}(x) : \text{MILP}$$

$$UB = f(x) : \text{MINLP}$$

نقطه پایان حل مسئله در الگوریتم SOS جایی است که شرط زیر برای فاصله دوگانگی برآورده شود:

$$\frac{|UB - LB|}{|LB|} \leq \varepsilon.$$

در اینجا ε حد فاصله دوگانگی را نشان می‌دهد. اگر شرط بالا در تکرار F ارضا گردیده باشد، الگوریتم SOS به پایان می‌رسد و نتایج به‌دست‌آمده برنامه MINLP در همین تکرار به‌عنوان جواب‌های نهایی مسئله (۲۱) گزارش می‌شوند. در غیر این صورت به گام ۴ می‌رویم.

قدم ۴: به‌روزرسانی نقاط شکست تقریب SOS. با حل

معادله (۲۱) یک جواب برای هر متغیر x به‌دست

می‌آید. نتایج به‌دست‌آمده برای هر متغیر پیوسته به نقاط

شکست در مجموعه قبلی اضافه می‌گردد. اگر

مجموعه‌ای از نقاط شکست برای هر مجموعه میانی هم

در نظر گرفته شده باشد، آنها هم باید به روشی مشابه

به‌روزرسانی گردند. انتظار می‌رود که مجموعه جدید

یعنی $F_i(P_i) = a_i + b_i P_i + c_i P_i^2$ می‌باشد. محدودیت‌های در نظر گرفته‌شده نیز (۱۲) و (۱۳) و محدودیت‌های (۱۷) الی (۲۰) می‌باشد. نتایج به‌دست‌آمده از اجرای روش SOS پیشنهادی بر روی این سیستم در جدول ۱ آمده و با نتایج ۳ روش هوشمند دیگر مقایسه گردیده است. اولین روش ارائه‌شده در جدول ۱ بر مبنای الگوریتم ژنتیک (GA^۳)، دومین روش بر مبنای الگوریتم بهینه‌سازی دسته ذرات جاذب و دافع (ARPSO^۴) و سومین روش نیز بر مبنای الگوریتم ژنتیک کد حقیقی (RCGA^۵) می‌باشد. سطر چهارم جدول نیز نتایج روش پیشنهادی را نشان می‌دهد. نتایج گزارش شده در این جدول، به‌طور مستقیم از مراجع نشان داده‌شده در جدول مورد اقتباس قرار گرفته است. نتایج ارائه‌شده نشان می‌دهد که روش پیشنهادی مقدار هزینه کمتری را نسبت به روش‌های دیگر به‌دست آورده است.

جدول ۱. نتایج سیستم ۳۰ شینه نمونه ۱ در مقایسه با روش‌های دیگر

روش حل	هزینه تولید (\$)
الگوریتم GA مرجع [۳۶]	۱۲۴۵/۵۶
الگوریتم ARPSO مرجع [۳۷]	۱۲۴۵/۵۱۶
الگوریتم RCGA مرجع [۳۸]	۱۲۴۴/۳۲۷
روش پیشنهادی SOS	۱۲۴۳/۱۴۲

نمونه ۲: روش SOS پیشنهادی بر روی یک سیستم ۳۰ شینه با ۶ ژنراتور نیز تست گردیده است. مسئله مهم در

$\tilde{g}(x, z)$ ایجاد می‌شوند. در ادامه فرم MINLP مسئله ACED را می‌توان به‌وسیله الگوریتم SOS و با استفاده از روش قدم‌به‌قدم توضیح داده‌شده در قسمت قبل حل نمود.

۴ نتایج عددی حاصل از حل مسئله ACED با استفاده از روش پیشنهادی

به‌منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهادی برای حل مسئله ACED، الگوریتم SOS را بر روی سیستم‌های قدرت شناخته‌شده‌ای از قبیل ۳۰ شینه و ۱۱۸ شینه تست نموده‌ایم. این سیستم‌ها به‌عنوان سیستم تست در اکثر کارهای قبلی در این زمینه مورد استفاده قرار گرفته است. سیستم ۳۰ شینه دارای ۴۱ خط انتقال می‌باشد. درحالی‌که سیستم ۱۱۸ شینه ۱۸۶ خط انتقال دارد. اطلاعات این دو سیستم از [۳۴، ۳۳] انتخاب شده است. در اینجا از حل‌کننده‌های DICOPT^۱ و CPLEX نرم‌افزار GAMS^۲ برای حل مسئله MILP و MINLP به ترتیب استفاده نموده‌ایم. توضیحات بیشتر در مورد این حل‌کننده‌ها را می‌توان در [۳۵] پیدا نمود.

نتایج به‌دست‌آمده برای سیستم تست ۳۰ شینه

نمونه یک: در این قسمت یک سیستم ۳۰ شینه با ۳ ژنراتور در نظر گرفته‌شده است. در این نمونه از محدودیت‌های عملی ژنراتورها صرفه‌نظر شده است. به‌عبارتی تابع هدف این مسئله ACED فقط معادله (۲)

³ Genetic Algorithm

⁴ Attractive and Repulsive Particles Swarm Optimization

⁵ Real -Coded Genetic Algorithm

¹ Discrete and Continuous Optimizer

² Generalized Algebraic Modeling Systems

SOS پیشنهادی در نمونه‌های غیرمحدب و پیچیده‌تر کارایی بیشتری را دارا می‌باشد.

جدول ۲. نتایج سیستم ۳۰ شینه نمونه ۲ در مقایسه با روش‌های دیگر

روش حل	هزینه تولید (\$) (\$)	زمان (S)
RCGA مرجع [۳۹]	۵۶۳/۵۱۶۷	۸۲۶/۱۹
RCGA مرجع [۳۸]	۵۶۱/۸۶۷۳	۱۱/۱۵
روش پیشنهادی SOS	۵۴۴/۴۷۳۸	۱/۹۶

نتایج به‌دست‌آمده برای سیستم تست ۱۱۸ شینه

به‌منظور نشان دادن کارایی روش بر روی سیستم‌های بزرگ‌تر، سیستم ۱۱۸ شینه با ۵۴ واحد ژنراتوری نیز مورد تست قرار گرفته است. در حل مدل ACED سیستم ۱۱۸ شینه، تمام محدودیت‌های ژنراتورها در نظر گرفته‌شده است و مدل آن کاملاً مشابه با مدل در نظر گرفته‌شده برای نمونه ۲ سیستم ۳۰ شینه می‌باشد. نتایج به‌دست‌آمده در جدول ۳ نشان داده شده است. از آنجایی که نتایج هیچ الگوریتم هوشمندی جهت حل این سیستم با محدودیت‌های در نظر گرفته‌شده در دسترس نبود، نتایج با دو روش عددی DICOPT و SBB^۱ از حل‌کننده‌های MINLP نرم‌افزار GAMS مقایسه گردیده است [۳۵]. در اینجا نیز روش پیشنهادی کمترین هزینه تولید را در بین همه روش‌ها به خود اختصاص داده است.

جدول ۳. نتایج سیستم ۱۱۸ شینه در مقایسه با روش‌های دیگر

روش حل	هزینه تولید (\$) (\$)
--------	-----------------------

اینجا آن است که در این نمونه تمام محدودیت‌های کاربردی ژنراتورها در نظر گرفته‌شده است. به عبارتی تابع هدف مسئله ACED ارائه‌شده در این بخش، معادله (۷) بوده و همچنین تمام محدودیت‌های نشان داده‌شده در قسمت دوم نیز در نظر گرفته‌شده است. بدیهی است با در نظر گرفتن مدل کامل برای مسئله مطرح شده در این نمونه، بر درجه غیرمحدب بودن و پیچیدگی مسئله افزوده شده است. نتایج این شبیه‌سازی در جدول ۲ ارائه شده و با نتایج دو روش RCGA دیگر مقایسه گردیده است. در اینجا نیز مشخص است که روش پیشنهادی در مقایسه با دیگر روش‌های جدول ۲ هزینه کمتری را دارا می‌باشد. به علت در دسترس بودن زمان حل دو روش دیگر، زمان حل هر سه روش نیز در جدول (۲) ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش پیشنهادی به‌طور چشمگیری زمان حل مسئله ACED را نسبت به دیگر روش‌ها کاهش داده است. این به آن خاطر است که الگوریتم‌های هوشمند برای پیدا کردن جواب بهینه مسیرهای مختلفی را باید جستجو نمایند که معمولاً منجر به یک مسیر کند می‌گردد. روش پیشنهادی با استفاده از یک کامپیوتر با مشخصات ۵۱۲ MB RAM و ۲ GHz به‌دست‌آمده است و نتایج روش مراجع [۳۹] هم با یک سخت‌افزار نسبتاً مشابه به‌دست‌آمده است.

مقایسه نتایج نمونه ۱ و نمونه ۲ نشان می‌دهد که اختلاف بزرگتری میان هزینه تولید روش پیشنهادی و دیگر روش‌ها در نمونه ۲ وجود دارد؛ به عبارت دیگر، با توجه به افزایش چشمگیر درجه غیرمحدب تابع هدف در نمونه ۲، می‌توان به این نتیجه رسید که روش

¹ Standard Branch and Bound

مقاله جهت حل این مسئله از روش‌های محدب‌سازی بر مبنای تبدیل ریاضی SOS استفاده گردید. تقریب‌های SOS با تبدیل مسئله MINLP غیرمحدب به یک مسئله MILP، یک نقطه شروع اولیه مناسب برای متغیرهای پیوسته مسئله MINLP یافته که در نتیجه منجر به بهبود نتایج مسئله MINLP موردنظر می‌گردد. مؤثر بودن روش پیشنهادی با حل چند نمونه از سیستم‌های تست شناخته‌شده در این عرصه و مقایسه با انواع روش‌های هوشمند و عددی ارائه‌شده در کارهای تحقیقی گذشته مورد اثبات قرار گرفت. نتایج نشان داد که توانایی روش پیشنهادی در حل مسائل پیچیده، چشم‌گیر می‌باشد. روش و مدل پیشنهادی می‌تواند مراکز دیسپاچینگ را در امر نظارت دقیق‌تر و بیشتر بر سیستم‌هایشان با زمان محاسباتی مناسب، یاری برساند.

DICOPT	۵۸۳۴۵/۰۹۷
SBB	۵۸۳۴۰/۵۹۴
روش پیشنهادی SOS	۵۷۸۹۱/۱۲۷

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله ACED که یک مسئله بهینه‌سازی MINLP غیرمحدب محسوب می‌شود، ارائه گردید. حل این مدل توسط الگوریتم‌های ارائه‌شده در این عرصه برای سیستم‌های واقعی مخصوصاً سیستم‌های بزرگ یک هدف بسیار سخت (اگر نگوئیم غیرممکن) بوده و نیازمند به زمان حل بسیار زیاد می‌باشد. به همین دلیل اغلب مراکز دیسپاچینگ سیستم قدرت معمولاً یک مدل ساده از ACED ارائه می‌نمایند که علاوه بر مؤثر بودن نتایج به‌دست‌آمده، قابل اطمینان نمی‌باشند. در این

References

- [1] M. Avriel, B. Golany, *Mathematical Programming for Industrial Engineers*, New York: Marcel Dekker, 1996.
- [2] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [3] A. Attarha, N. Amjady, *Solution of security constrained optimal power flow for large-scale power systems by convex transformation techniques and Taylor series*, IET Generation, Transmission & Distribution, 2016.
- [4] N. Amjady, M.R. Ansari, *Non-convex security constrained optimal power flow by a new solution method composed of Benders decomposition and special ordered sets*. *Int. Trans. Electr.*, 24 (2013) 842–857.
- [5] A. Lundell, T. Westerlund, *Optimization of transformations for convex relaxations of MINLP problems containing signomial functions*, *Process Syst. Eng.*, 27 (2009) 231–236.
- [6] A. Lundell, J. Westerlund, *Some transformation techniques with applications in global optimization*, *J. Glob. Optim.*, 43 (2009) 391–405.
- [7] J.T.M. Lin, *Global optimization of signomial mixed-integer nonlinear programming problems with free variables*, *J. Glob. Optim.*, 42 (2008) 39–49.
- [8] A. Lundell, A. Skjäl, T. Westerlund, *A reformulation framework for global optimization*, *J. Glob. Optim.*, 57 (2013) 115–141.

- [9] A.J. Wood, B.F. Wollenberg, Power Generation, Operation and Control, New York: Wiley, 1996.
- [10] Y.R. Sood, N.P. Padhy, H.O. Gupta, New hybrid model for wheeling cost analysis under deregulated environment, IEEE PES Transmission and Distribution Conference and Exposition, 2003, pp. 97–102.
- [11] J.C. Dodu, P. Martin, A. Merlin, J. Pouget, An optimal formulation and solution of short-range operating problems for a power system with flow constraints, Proc. IEEE, 60 (1972) 54–63.
- [12] C.L. Chen, S.C. Wang, Branch-and bound scheduling for thermal generating units, IEEE Trans. Energy Convers., 8 (1993) 184–189.
- [13] J. Parikh, D. Chattopadhyay, A multi-area linear programming approach for analysis of economic operation of the Indian power system, IEEE Trans. Power Syst., 11 (1996) 52–58.
- [14] J.I.-Y. Fan, L. Zhang, Real-time economic dispatch with line flow and emission constraints using quadratic programming, IEEE Trans. Power Syst., 13 (1998) 320–325.
- [15] J. Nanda, I. Hari, M.L. Kothari, Economic emission load dispatch with line flow constraints using a classical technique, IEE Proc. Gener. Transm. Distrib., 141 (1994) 1–10.
- [16] J.F. Bard, Short-term scheduling of thermal-electric generators using Lagrangian relaxation, Oper. Res., 36 (1988) 756–766.
- [17] P.G. Lowery, Generating unit commitment by dynamic programming, IEEE Trans. Power Apparatus Syst., PAS-85 (1996) 422–426.
- [18] C.-L. Chiang, Genetic-based algorithm for power economic load dispatch, IEE Proc., Gener. Transm. Distrib., 1 (2007) 261–269.
- [19] W.M. Lin, F.S. Cheng, M.T. Tsay, An improved tabu search for economic dispatch with multiple minima, IEEE Trans. Power Syst., 17 (2002) 108–112.
- [20] S. Ching-Tzong, L. Chien-Tung, New approach with a Hopfield Modeling Framework to economic dispatch, IEEE Trans. Power Syst. 15 (2000) 541–545.
- [21] Y.H. Song, C.S. Chou, T.J. Stonham, Combined heat and power economic dispatch by improved ant colony search algorithm, Electr. Power Syst. Res. 52 (1999) 115–121.
- [22] N. Sinha, R. Chakrabarti, PK. Chattopadhyay, Evolutionary programming techniques for economic load dispatch, IEEE Trans. Evol. Comput., 7 (2003) 83–94.
- [23] A. Pereira-Neto, C. Unsihuay, O.R. Saavedra, Efficient evolutionary strategy optimization procedure to solve the nonconvex economic dispatch problem with generator constraints, IEE Proc., Gen., Transm., Distrib., 152 (2005) 653–660.
- [24] K.T. Chaturvedi, M. Pandit, L. Srivastava, Self-Organizing Hierarchical Particle Swarm Optimization for Non-convex Economic Dispatch, IEEE Trans. Power Syst., 23 (2008) 1079–1087.
- [25] A.I. Selvakumar, K. Thanushkodi, Anti-predatory particle swarm optimization: Solution to nonconvex economic dispatch problems, Electric Power Syst. Res., 78 (2008) 2–10.
- [26] L. Wang, C. Singh, Stochastic economic emission load dispatch through a modified particle swarm optimization algorithm, Ele. Power Syst. Res., 78 (2008) 1466–1476.
- [27] B.K. Panigrahi, V.R. Pandi, Bacterial foraging optimization: Nelder–Mead hybrid algorithm for economic load dispatch, IET Gener. Transm. Distrib., 2 (2008) 556–565.
- [28] D.C. Walters, G.B. Sheble, Genetic Algorithm Solution of Economic Dispatch with Valve Point Loading, IEEE Trans. Power Syst., 8 (1993) 1325–1332.
- [29] J.-B. Park, K.-S. Lee, J.-R. Shin, K.Y. Lee., A particle swarm optimization for economic dispatch with nonsmooth cost functions, IEEE Trans. Power Syst., 20 (2005) 34–42.

- [30] F.N. Lee, A.M. Breipohl, Reserve constrained economic dispatch with prohibited operating zones, *IEEE Trans. Power Syst.*, 8 (1993) 246–254.
- [31] E. Beale, J. Tomlin, Special facilities in a general mathematical programming system for non-convex problems using ordered sets of variables, In Lawrence, J., editor, *Proceedings of Fifth, International Conference on Operation Research*, pp. 447-454, London. Tavistock Publications, 1970.
- [32] S. Leyffer, A.Sartenaer, E. Wanufelle, *Branch-and-Refine for Mixed-Integer Non-convex Global Optimization*, Mathematics and Computer Science Division, Sept. 2008.
- [33] S. Sayah, K. Zehar, Modified differential evolution algorithm for optimal power flow with non-smooth cost functions, *Energ. Conversion Manag.*, 49 (2008) 3036–3042.
- [34] IEEE 118-bus system with non-smooth nonlinear characteristics [Online]. Available: http://motor.ece.iit.edu/data/118_nonsmooth.xls.
- [35] Generalized Algebraic Modeling Systems (GAMS). [Online]. Available: <http://www.gams.com>.
- [36] J. Nanda, R.B. Narayanan, Application of genetic algorithm to economic load dispatch with Lineow constraints, *Elect. Power Energy Syst.*, 24 (2002) 723-729.
- [37] K.S. Swarup, P.R. Kumar, A new evolutionary computation technique for economic dispatch with security constraints, *Elect. Power Energy Syst.*, 28 (2006) 273-283.
- [38] N. Amjady, H. Nasiri-Rad, Nonconvex Economic Dispatch With AC Constraints by a New Real Coded Genetic Algorithm, *IEEE Trans. Power Syst.*, 24 (2009) 121-132.
- [39] I.G. Damousis, A.G. Bakirtzis, P.S. Dokopoulos, Network-constrained economic dispatch using real-coded genetic algorithm, *IEEE, Trans. Power Syst.*, 18 (2003) 198-205.