

بررسی ردهای از مسائل غیرخطی با شرط مرزی دیریکله

سعید شکوه*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۷/۰۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۱۸

On a class of nonlinear problems with Dirichlet boundary condition

Saeid Shokooh*

Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Gonbad Kavous University

Received: 9/24/2017

Accepted: 1/8/2018

Abstract: In this paper, by applying variational method, we study a class of nonlinear problems with Dirichlet boundary condition. We establish the existence of infinitely many solutions for such problems and we also provide some particular cases of our main result.

Keywords: Dirichlet boundary condition, variational method, infinitely many solutions.

چکیده: در این مقاله ردهای از مسائل غیرخطی با شرط مرزی دیریکله را با روش تغییراتی مورد بررسی قرار دادیم. وجود بی‌نهایت جواب را برای این‌گونه مسائل اثبات و چند نتیجه از آن را نیز مطرح کردیم.

کلمات کلیدی: شرط مرزی دیریکله، روش تغییراتی، بی‌نهایت جواب.

۱ مقدمه

است (مراجع [۲ تا ۴] را مشاهده نمایید). به عنوان مثال

نویسندگان در [۵] وجود جواب‌های مثبت برای مسئله

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = \lambda f(t, u) \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

را با مقایسه $F(t, \xi) := \int_{\xi}^{\xi} f(t, x) dx$ و ξ^2 نزدیک

صفر و ξ در بی‌نهایت، بررسی کرده‌اند. در مقاله فوق

با توجه به حدهای $\frac{F(t, \xi)}{\xi^2}$ در صفر و $\frac{F(t, \xi)}{\xi}$ در

بی‌نهایت، وجود و چندگانگی یا بی‌نهایت جواب برای

معادلات دیریکله^۱ به فرم

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = f(t, u) \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

نقش مهمی در هندسه دیفرانسیل و در نظریه نسبیت ایفا

می‌کنند (مراجع [۱] را مشاهده نمایید). در سال‌های اخیر

وجود و چندگانگی جواب‌های مثبت برای مسئله (۱)

توسط ریاضیدان‌های مختلفی مورد بررسی قرار گرفته

¹ Dirichlet

حالت زیر از اصل تغییراتی پروفیسور ریچری [۶] نتایج اصلی را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ حقیقی انعکاسی و $\Phi, \Psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع مشتق پذیر فرشه^۴ باشند، به طوری که Φ نیم پیوسته ضعیف پایینی، به طور قوی پیوسته و اجباری و تابع Ψ نیم پیوسته ضعیف بالایی باشد. برای هر $r > \inf_{u \in X} \Phi(u)$ قرار می‌دهیم:

$$\phi(r) := \inf_{u \in \Phi^{-1}((-\infty, r))} \frac{\sup_{u \in \Phi^{-1}((-\infty, r))} \Psi(u) - \Phi(u)}{r - \Phi(u)},$$

و

$$\delta := \liminf_{r \rightarrow (\inf_X \Phi)^+} \phi(r).$$

در این صورت اگر $\delta < +\infty$ ، برای هر $\lambda \in (0, 1/\delta)$ یکی از حالت‌های زیر برقرار است:

(الف) یک مینیمم مطلق از تابع Φ هست که یک مینیمم موضعی از تابع $I_\lambda := \Phi - \lambda\Psi$ می‌باشد، یا
(ب) یک دنباله $\{u_n\}$ دویه‌دو مجزا از نقاط بحرانی تابع I_λ موجود است که به طور ضعیف به مینیمم مطلق تابع Φ همگراست و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) = \inf_{u \in X} \Phi(u).$$

در مراجع [۷ تا ۹] و منابع مندرج در آنها اصل تغییراتی ریچری و گونه‌هایی از آن برای به دست آوردن بی‌نهایت جواب از مسائل مقدارمرزی استفاده شده است.

حال چند مفهوم را که در ادامه به آنها نیاز داریم بیان می‌کنیم. قرار می‌دهیم $W^{1,2}((0,1)) := X$ و نرم

$$\|u\| := \left(\int_0^1 |u'(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

را روی این فضا در نظر

مسئله (۲) ثابت شده است. در واقع نویسندگان با استفاده از روش جواب بالایی و پایینی و روش کمینه‌سازی^۱، اثبات کرده‌اند که اگر $\liminf_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{F(\xi)}{\xi^2} = +\infty$ و $\limsup_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{F(\xi)}{\xi^2} = +\infty$ ، آنگاه به ازای $\lambda > 0$ مسئله (۲) در حالت تفکیک شده، یک دنباله از جواب‌های ضعیف مثبت می‌پذیرد. همچنین در [۵] یکی از فرض‌های کلیدی،

$$\limsup_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\int F(x, \xi) dx}{\xi^2} = +\infty$$

است که ω یک زیر مجموعه باز از Ω می‌باشد و به علاوه در [۵] فرض‌هایی که روی رفتار F در صفر بود با شرایطی مناسب از ثابت‌های طیفی λ_1^* و $\lambda_1^\#$ تعویض شده است.

هدف این مقاله مطالعه مسئله یک بعدی

$$\begin{cases} -\left(\left(1 + \frac{u''}{\sqrt{1+u''}} \right) u' \right)' = \lambda f(t, u) \text{ in } (0,1), \\ u(0) = 0 = u(1), \end{cases} \quad (3)$$

می‌باشد که $f : [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع کاراتئودری^۲، $\lambda > 0$ یک پارامتر حقیقی، $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ، $(N \geq 1)$ ، یک دامنه کراندار است.

هدف اصلی در این مقاله به دست آوردن شرایط کافی است تا تضمین کند برای λ ‌های مناسب، مسئله (۳) بی‌نهایت جواب ضعیف نابدهی نامنفی دارد که در C^1 به صفر همگراست. برای این منظور نیاز داریم تابع اولیه f در شرایط مناسب صادق باشد. با استفاده از

³ Ricceri

⁴ Fréchet

¹ Minimize

² Caratheodory

۲ نتایج اصلی

در این بخش نتایج اصلی را بیان خواهیم نمود.

قضیه ۲. تعریف می‌کنیم

$$B^\circ := \limsup_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\int_{\xi^2}^{\xi^{3/4}} F(t, \xi) dt}{\xi^2}$$

و $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$: f یک تابع L -کاراتودری بوده که

(الف) $f(t, 0) = 0$ تقریباً همه‌جا $t \in [0, 1]$,

(ب) $F(t, \xi) \geq 0$ برای هر

$$(t, \xi) \in \left([0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1] \right) \times \mathbb{R}^+.$$

همچنین فرض کنیم دنباله حقیقی $\{a_n\}$ و دنباله $\{b_n\}$ در $[0, 1]$ با شرط $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ موجود باشد، به طوری که برای تقریباً همه‌جا $t \in [0, 1]$ و هر

$$x \in [0, b_n]$$

$$|f(t, x)| \leq k,$$

برای بعضی ثابت‌های حقیقی $k > 0$ ، و

$$a_n^\vee < \frac{1}{4 + 2\sqrt{2}} b_n^\vee \quad (\text{ج})$$

(د)

$$A_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 \max_{|\xi| \leq b_n} F(t, \xi) dt - \int_0^1 F(t, a_n) dt}{\frac{1}{4} b_n^\vee - (4 + 2\sqrt{2}) a_n^\vee} < \frac{B^\circ}{4 + 2\sqrt{2}}.$$

آنگاه مسئله (۳) یک دنباله از جواب‌های ضعیف نامنفی

نابدیهی $\{u_n\}$ در $C^1([0, 1])$ می‌پذیرد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{C^1([0, 1])} = 0.$$

می‌گیریم (جهت مطالعه فضاهای سوبولف^۱ و خواص آنها مرجع [۱۰] را مشاهده نمایید). می‌دانیم X به‌طور

فشرده در $C^0([0, 1])$ نشانده می‌شود و $\|u\|_\infty \leq \|u\|$

$$\text{که } \|u\|_\infty := \max_{t \in [0, 1]} |u(t)|.$$

تعریف ۱. تابع $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع

L -کاراتودری است هرگاه:

(الف) تابع $t \mapsto f(t, x)$ به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد،

(ب) تابع $x \mapsto f(t, x)$ پیوسته است به‌ازای تقریباً همه‌جا $t \in [0, 1]$.

(پ) به‌ازای هر $\rho > 0$ ، یک تابع $l_\rho \in L^1([0, 1])$ وجود دارد که

$$\sup_{|x| \leq \rho} |f(t, x)| \leq l_\rho(t)$$

به‌ازای $t \in [0, 1]$ تقریباً همه‌جا.

تابع اولیه F از f به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(t, \xi) := \int_0^\xi f(t, x) dx,$$

به‌ازای $(t, \xi) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$.

تعریف ۲. تابع $u \in X$ را یک جواب ضعیف از

مسئله (۳) گویند، هرگاه برای هر $v \in X$ داشته باشیم:

$$\int_0^1 \left(u'(t)v'(t) + \frac{u''(t)v'(t)}{\sqrt{1+u''(t)}} \right) dt - \lambda \int_0^1 f(t, u(t))v(t) dt = 0.$$

¹ Sobolev

به‌ازای $(t, \xi) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ ، در این صورت G و g در شرایط این قضیه صدق می‌کنند. حال مسئله کمکی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} -(a(|u'|^2 u'))' = \lambda g(t, u), & t \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

فرض کنیم توابع $\Phi, \Psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف شوند:

$$\Phi(u) := \frac{1}{2} \int_0^1 A(|u'|^2) dt,$$

$$\Psi(u) := \int_0^1 G(t, u(t)) dt,$$

و قرار دهیم $I_\lambda(u) := \Phi(u) - \lambda \Psi(u)$ برای هر

$$u \in X, s \leq A(s) \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{2} s$$

تابع Φ روی X خوش‌تعریف، پیوسته و اجباری است. به‌علاوه با توجه به محدب بودن تابع $\Phi(s^2)$ در بازه $[0, +\infty)$ ، تابع Φ محدب بوده و در نتیجه نیم‌پیوسته ضعیف پایینی است. تابع Ψ نیز خوش‌تعریف و نیم‌پیوسته ضعیف بالایی است. به‌علاوه، توابع Φ و Ψ به‌طور پیوسته دارای مشتق‌گاتو^۱ می‌باشند و

$$\Phi'(u)(v) := \int_0^1 a(|u'(t)|^2) u'(t) v'(t) dt$$

و

$$\Psi'(u)(v) := \int_0^1 g(t, u(t)) v(t) dt$$

برای هر $u, v \in X$ ، مانند حکم قضیه، λ را ثابت در نظر می‌گیریم. ابتدا نشان می‌دهیم $\lambda < 1/\delta$. تعریف

برهان: هدف استفاده از قضیه ۱ برای مسئله (۳) می‌باشد. فرض کنیم تابع $a: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ یک تابع ناصعودی باشد که دارای ضابطه زیر است:

$$a(s) := \begin{cases} 1 + \frac{1}{\sqrt{1+s}}, & s \in [0, 1), \\ \frac{2 + \sqrt{2}}{16} (s-2)^2 + \frac{14 + 7\sqrt{2}}{16}, & s \in [1, 2), \\ \frac{14 + 7\sqrt{2}}{16}, & s \in [2, +\infty). \end{cases}$$

قرار می‌دهیم برای $s \geq 0$ ،

$$A(s) := \int_0^s a(t) dt.$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$1 \leq a(s) \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

و بنابراین

$$s \leq A(s) \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{2} s$$

برای هر $s \geq 0$. از طرفی چون تابع $s \mapsto sa(s^2)$ صعودی است، تابع $s \mapsto A(s^2)$ در بازه $[0, +\infty)$ محدب است. برای $t \in [0, 1]$ تقریباً همه‌جا، تابع f را به‌صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$g(t, x) := \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ f(t, x), & x \in [0, b_1), \\ f(t, b_1), & x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

که b_1 از دنباله $\{b_n\}$ گرفته شده است. تابع g ، L^1 -کارائتودری است و اگر $G: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع اولیه آن باشد یعنی:

$$G(t, x) := \int_0^x g(t, x) dx$$

¹ Gateaux

I_λ ، مینیمم موضعی در صفر ندارد. چون $\{ \eta_n \}$ از اعداد مثبت و $\tau > 0$ هست به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$ و

$$\frac{1}{\lambda} < \tau < \frac{1}{\frac{3}{4} + 2\sqrt{2}} \frac{\int_{1/4}^{3/4} G(t, \eta_n) dt}{\eta_n^2},$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ به اندازه کافی بزرگ. برای هر $n \in \mathbb{N}$ فرض کنیم $s_n \in X$ به صورت زیر تعریف شود:

$$s_n(t) := \begin{cases} 4\eta_n t, & t \in [0, 1/4], \\ \eta_n, & t \in [1/4, 3/4], \\ 4\eta_n(1-t), & t \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

چون $\lambda\tau > 1$ پس داریم:

$$\begin{aligned} I_\lambda(s_n) &= \Phi(s_n) - \lambda\Psi(s_n) \\ &\leq (4 + 2\sqrt{2})\eta_n^2 - \lambda \int_{1/4}^{3/4} G(t, \eta_n) dt \\ &< (4 + 2\sqrt{2})\eta_n^2(1 - \lambda\tau) < 0 \\ &= \Phi(0) - \lambda\Psi(0), \end{aligned}$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ به اندازه کافی بزرگ. با توجه به اینکه $\|s_n\|$ به صفر همگراست، تابع I_λ در صفر مینیمم موضعی ندارد. همچنین صفر تنها مینیمم مطلق تابع Φ است. در نتیجه I_λ مینیمم موضعی در تنها مینیمم تابع Φ ندارد. پس با استفاده از قضیه ۱، یک دنباله $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی تابع I_λ وجود دارد که به طور ضعیف به صفر همگراست. در نظر داشته باشیم که نشان‌دهی X در $C^0([0, 1])$ فشرده است، پس این نقاط بحرانی به طور قوی به صفر همگراست و $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = 0$. حال ثابت می‌کنیم نقاط بحرانی تابع انرژی نامنفی هستند. فرض خلف گیریم که u یک نقطه بحرانی تابع I_λ بوده و تعریف می‌کنیم:

می‌کنیم $r_n := \frac{1}{4}b_n^2$. در نتیجه برای هر $u \in X$ با شرط $\Phi(u) < r_n$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{4}\|u\|^2 \leq \Phi(u) < r_n.$$

بنابراین

$$\|u\|_\infty \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

برای هر $u \in X$ به طوری که $\Phi(u) < r_n$. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\phi(r_n) \leq \inf_{\Phi(u) < r_n} \frac{\int \max_{|\xi| \leq b_n} G(t, \xi) dt - \int G(t, u(t)) dt}{\frac{1}{4}b_n^2 - \frac{1}{4} \int A(|u'(t)|^2) dt}.$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$w_n(t) := \begin{cases} 4a_n t, & t \in [0, 1/4], \\ a_n, & t \in [1/4, 3/4], \\ 4a_n(1-t), & t \in [3/4, 1], \end{cases}$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$. به وضوح $w_n \in X$ و

$$\Phi(w_n) \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \|w_n\|^2 = (4 + 2\sqrt{2})a_n^2.$$

با توجه به فرض (پ)، داریم $\Phi(w_n) < r_n$. به علاوه، با توجه به فرض (ب) می‌توان نوشت:

$$\Psi(w_n) \geq \int_{1/4}^{3/4} G(t, a_n) dt,$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ در نتیجه

$$\phi(r_n) \leq \frac{\int \max_{|\xi| \leq b_n} G(t, \xi) dt - \int G(t, a_n) dt}{\frac{1}{4}b_n^2 - (4 + 2\sqrt{2})a_n^2},$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$. حال شرط (د) را به یاد آوریم، پس

$$0 \leq \delta \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(r_n) \leq A_+ < +\infty.$$

اگر از نامساوی بالا استفاده کنیم و از آنجا که $\lambda < 1/A_+$ ، پس $\lambda < 1/\delta$. حال ادعا می‌کنیم تابع

اکنون ثابت می‌کنیم $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{C^{1,\beta}([0,1])} = 0$ در واقع فرض کنیم (فرض خلف) زیر دنباله $\{u_{n_h}\}$ وجود دارد، به طوری که $\lim_{h \rightarrow \infty} \|u_{n_h}\|_{C^{1,\beta}([0,1])} > 0$ پس با توجه به اینکه $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{\infty} > 0$ نتیجه می‌گیریم $\lim_{h \rightarrow \infty} \|u'_{n_h}\|_{\infty} > 0$. طبق قضیه آرزولا-اسکولی یک زیر دنباله که باز هم با $\{u_{n_h}\}$ نشان می‌دهیم، وجود دارد به طوری که $\{u'_{n_h}\}$ به طور یکنواخت به صفر همگراست که با $\lim_{h \rightarrow \infty} \|u'_{n_h}\|_{\infty} > 0$ در تناقض است. نتیجه می‌گیریم برای n به قدر کافی بزرگ، $\|u_n\|_{C^1([0,1])} \leq 1$. \square

حال می‌خواهیم چند نتیجه از قضیه ۲ را بیان نماییم. ابتدا قرار می‌دهیم:

$$B^\circ := \limsup_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\int \max_{|t| \leq \xi} F(t, \xi) dt}{\xi^2}.$$

نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۱. فرض نماییم تابع $f: [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع L -کارا تودری باشد به طوری که فرض‌های (الف) و (ب) از قضیه ۲ برقرار باشد. همچنین فرض کنیم (ح) دو عدد حقیقی مثبت σ, k وجود دارد به طوری که برای تقریباً همه جا $t \in [0,1]$ و برای $x \in [0, \sigma]$ داشته باشیم: $|f(t, x)| \leq k$ آنگاه

$$A_1 < \frac{1}{8 + 4\sqrt{2}} B^\circ \quad (\text{خ})$$

آنگاه برای هر $\lambda \in \left(\frac{4 + 2\sqrt{2}}{B^\circ}, \frac{1}{2A_1} \right)$ مسئله (۳)

دارای یک دنباله از جواب‌های ضعیف نابدیهی و نامنفی

$$A := \{t \in [0,1] : u(t) < 0\},$$

که ناتهی و دارای اندازه لبگ مثبت باشد. فرض کنیم $v = \min\{0, u\}$ به وضوح $v \in X$ یک نقطه بحرانی تابع I_λ بوده و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi'(u)(v) - \lambda \Psi'(u)(v) \\ &= \int a(|u'(t)|^\alpha) u'(t) v'(t) dt \\ &\quad - \lambda \int g(t, u(t)) v(t) dt \\ &= \int_A a(|u'(t)|^\alpha) |u'(t)|^\alpha dt \\ &\geq \int_A |u'(t)|^\alpha dt, \end{aligned}$$

زیرا $a(s) \geq 1$ برای هر $s \geq 0$ و $g(t, s) = 0$ برای هر $t \in [0,1]$ تقریباً همه جا و برای $s < 0$. بنابراین، از آنجا که $u|_A \in W_0^{1,2}(A)$ پس $u \equiv 0$ روی A ، که تناقض است. بنابراین اگر u_n یک نقطه بحرانی از تابع I_λ باشد، آنگاه یک جواب ضعیف از مسئله کمکی بیان شده در بالا بوده و نامنفی است. همچنین با توجه به $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{\infty} = 0$ برای n به قدر کافی بزرگ و برای هر $t \in [0,1]$ خواهیم داشت $u_n(t) \leq b_1$. بنابراین $\|u_n\|_{\infty} \leq b_1$ برای n به قدر کافی بزرگ. از طرف دیگر با توجه به فرض‌های ما در مورد تابع f در $[0,1] \times [0, b_1]$ و با توجه به تعریف تابع g ، خواهیم داشت: $|g(t, x)| \leq k$ برای تقریباً همه جا $t \in [0,1]$ و $x \in \mathbb{R}$ حال با توجه به $\|u_n\|_{\infty} \leq b_1$ و $|g(t, x)| \leq k$ اعداد ثابت $\beta \in (0,1)$ و $\kappa > 0$ وجود دارند، به طوری که برای $n \in \mathbb{N}$ $\|u_n\|_{C^{1,\beta}([0,1])} \leq \kappa$ و $u_n \in X \cap C^{1,\beta}([0,1])$

نتیجه ۱ به صورت زیر خواهد بود:

(خ ۱)

$$A'_1 := \liminf_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^1 F(t, \xi) dt}{\xi^2} < \frac{1}{\lambda + 4\sqrt{2}} B^\circ$$

در واقع شرط (خ ۱) نتیجه می‌دهد برای هر

$$\lambda \in \left(\frac{4 + 2\sqrt{2}}{B^\circ}, \frac{1}{2A'_1} \right)$$

از جواب‌های ضعیف نابدیهی و نامنفی مانند $\{u_n\}$

است، به طوری که $\{u_n\} \subset C^1([0, 1])$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{C^1([0, 1])} = 0$$

سپاس‌گزاری

بدین وسیله از داور محترم مقاله که با پیشنهادهای ارزنده

خود موجب بهبود کیفیت مقاله شدند، نهایت تشکر و

قدردانی را دارم.

مانند $\{u_n\}$ است، به طوری که $\{u_n\} \subset C^1([0, 1])$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{C^1([0, 1])} = 0$$

نتیجه ۲. فرض کنیم تابع $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک

تابع L -کاراتودری باشد به طوری که فرض‌های (الف)

و (ب) از قضیه ۲ و فرض (ج) از

نتیجه ۱ برقرار باشد. همچنین فرض کنیم:

$$A_1 < \frac{1}{2}, \quad B^\circ > 4 + 2\sqrt{2}.$$

آنگاه مسئله:

$$\begin{cases} -\left(\left(1 + \frac{u'^2}{\sqrt{1+u'^2}} \right) u' \right)' = f(t, u) & \text{in } (0, 1), \\ u(0) = 0 = u(1), \end{cases}$$

دارای یک دنباله از جواب‌های ضعیف نابدیهی و نامنفی

مانند $\{u_n\}$ است، به طوری که $\{u_n\} \subset C^1([0, 1])$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{C^1([0, 1])} = 0$$

نتیجه ۳. وقتی f تابعی است نامنفی، شرط (خ) از

References

[1] R. Bartnik, L. Simon, Spacelike hypersurfaces with prescribed boundary values and mean curvature, *Comm. Math. Phys.*, 87 (1982) 131-152.

[2] W.M. Ni, J. Serrin, Non-existence theorems for quasilinear partial differential equations, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, 8 (1985) 171-185.

[3] W.M. Ni, J. Serrin, Existence and non-existence theorems for ground states of quasilinear partial differential equations, *The*

anomalous case, *Atti Convegna Lincei*, 77 (1986) 231-257.

[4] W.M. Ni, J. Serrin, Non-existence theorems for singular solutions of quasilinear partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 39 (1986) 379-399.

[5] F. Obersnel, P. Omari, Positive solutions of the Dirichlet problem for the prescribed mean curvature equation, *J. Differ. Eq.*, 249 (2010) 1674-1725.

[6] B. Ricceri, A general variational principle and some of its applications, *J. Comput. Appl. Math.*, 113 (2000) 401-410.

[7] G.A. Afrouzi, A. Hadjian, Infinitely many solutions for a class of Dirichlet quasilinear elliptic systems, *J. Math. Anal. Appl.*, 393 (2012) 265-272.

[8] G.A. Afrouzi, A. Hadjian, S. Heidarkhani, Infinitely many solutions for a mixed doubly eigenvalue boundary value problem, *Mediterr. J. Math.*, 10 (2013) 1317-1331.

[9] G. Molica Bisci, Variational problems on the sphere, in: *Recent Trends in Nonlinear Partial Differential Equations, Dedicated to Patrizia Pucci on the occasion of her 60th birthday, Contemporary Mathematics*, 595 (eds. J. Serrin, E. Mitidieri and V. Radulescu) (American Mathematical Society, 2013) 273-291.

[10] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic press. New York, 1995.