قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های (α,ψ,p)–انقباضی در فضاهای متریک احتمال مِنجر مجهز به r–فاصله

حمید شایان‌پور[۱]، پیمان احمدی[۲]، آسیه نعمتی‌زاده[۳،*]

۱. دانشیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد
۲. پژوهشگر، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد
۳. دانشجوی دکتری، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۸/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۲۲

Some fixed point theorems of (α,ψ,p)-contractive mappings in Menger probabilistic metric spaces with r-distance

Hamid Shayanpour[1], Peyman Ahmadi[2], Asiyeh Nematizadeh[3,*]

1. Associate Professor, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrekord University
2. Researcher, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrekord University
3. PhD Candidate, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrekord University

Received: 11/9/2017 Accepted: 1/12/2018

Abstract: In this paper, we introduce (α,ψ,p)-contractive mapping, α-admissible mapping and r-distance in Menger probabilistic metric space. Then we prove some fixed point theorems for (α,ψ,p)-contractive mappings in complete Menger probabilistic metric space with r-distances p and to assure the uniqueness of the fixed point, we added the property (H) to assumptions of theorems.

Keywords: Menger probabilistic metric space, (α,ψ,p)-contractive mapping, α-admissible mapping, r-distance.

چکیده: در این مقاله ابتدا مفاهیم نگاشت (α,ψ,p)–انقباضی، نگاشت α–قابل قبول و r–فاصله را در فضای متریک احتمال مِنجر معرفی می‌کنیم، سپس به اثبات قضایای پیرامون وجود نقطه ثابت برای نگاشت‌های (α,ψ,p)–انقباضی در فضای متریک احتمال مِنجر کامل مجهز به r–فاصله p می‌پردازیم و نشان می‌دهیم با افزودن ویژگی (H) به این قضایا، نگاشت‌های ذکر شده دارای نقطه ثابت یکتا می‌باشند.

کلمات کلیدی: فضای متریک احتمال مِنجر، نگاشت (α,ψ,p)–انقباضی، نگاشت α–قابل قبول، r–فاصله.

۱ مقدمه

فضای متریک احتمال تعمیمی از فضای متریک است که در آن به‌جای مقادیر نامنفی متر از توابع توزیع استفاده می‌شود. مطالعه فضای متریک احتمال اولین بار توسط مِنجر[۱] انجام شد [۱]. شویزر و اسکلار[۲] [۲] با اثبات

[1] Menger
[2] Schweizer and Sklar

*Corresponding author: a.nematizadeh@yahoo.com
*نویسنده مسئول

برخی از نتایج اساسی در این زمینه مفهوم فضای متریک احتمال را غنی‌تر کردند. اولین نتیجه نظریه نقطه ثابت در فضای متریک احتمال توسط سگال و باروچا-رید[۱] [۳] ارائه شده که در آن مفهوم B–انقباض احتمال معرفی و تعمیمی از اصل انقباضی باناخ کلاسیک برای فضای متریک احتمال مِنجر کامل بیان گردیده است. در [۳] ثابت شده است که هر B–انقباض احتمال در فضای متریک احتمال مِنجر کامل (X,F,Δ_m) دارای نقطه ثابت یکتاست. هادزیک[۲] نتایج به‌دست آمده در [۳] را برای کلاس کلی‌تر از t–نرم‌ها موسوم به t–نرم از نوع H توسیع داد [۴]. پس از آن انواع مختلفی از نگاشت‌های انقباضی توسط بسیاری از نویسندگان معرفی و قضایای نقطه ثابت متناظر با آنها بیان و اثبات شد [۵, ۶]. در ادامه چودری و داس[۳] [۷] با معرفی ایده تابع تغییر فاصله، نتیجه نقطه ثابت متریک کلاسیک خان[۴] و همکارانش [۸] را به فضای متریک احتمال توسیع دادند. اخیراً باباسف[۵] [۹] نتایج چادوری و داس را برای انقباض‌های غیرخطی تعمیم یافته توسیع داده‌اند. در سال ۲۰۱۴، سو و ژانگ[۶] [۱۰] قضایایی را درباره بهترین نقطه نزدیکی در فضاهای متریک احتمال اثبات کردند. برای مطالعه بیشتر در این زمینه می‌توان به منابع [۱۱-۱۴] مراجعه کرد.

در این مقاله ابتدا مفاهیم نگاشت (α,ψ,p)–انقباضی، نگاشت α–قابل قبول و r–فاصله را در فضای متریک احتمال مِنجر معرفی می‌کنیم، سپس به اثبات قضایایی پیرامون وجود نقطه ثابت برای نگاشت‌های (α,ψ,p)–انقباضی در فضای متریک احتمال مِنجر کامل مجهز به r–فاصله p می‌پردازیم و نشان می‌دهیم با افزودن ویژگی (H) به این قضایا، نگاشت‌های ذکر شده دارای نقطه ثابت یکتا می‌باشند. ابتدا بعضی از تعاریف و نتایج اصلی در فضاهای متریک احتمال که در این مقاله به کار می‌بریم را یادآوری می‌کنیم. خواننده می‌تواند برای اطلاعات کلی‌تر به مرجع [۲] مراجعه کند. همچنین در این مقاله قرار داد می‌کنیم که $0\times\infty=0$.

تعریف ۱. تابع حقیقی F از اعداد حقیقی تعمیم‌یافته $[-\infty,+\infty]$ به بازه بسته $[0,1]$ را یک تابع توزیع می‌نامیم هرگاه F صعودی و پیوسته چپ روی $(-\infty,+\infty)$ باشد، $F(\infty)=1$ و $F(-\infty)=0$. مجموعه همه توابع توزیع را با Γ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲. تابع توزیع F را یک تابع توزیع فاصله می‌نامیم هرگاه $F(0)=0$. مجموعه همه توابع توزیع فاصله را با Γ^+ نشان می‌دهیم و $D^+=\{F\in\Gamma^+ \mid \sup(F)=1\}$.

چون برای هر $F\in\Gamma^+$ داریم $F[-\infty,0]=0$، بنابراین در این مقاله $F\in\Gamma^+$ را از بازه $[0,+\infty]$ به $[0,1]$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۳. برای هر $a\in[-\infty,+\infty)$ تابع توزیع دیراک ε_a را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon_a(x)=\begin{cases}0 & -\infty\le x\le a,\\ 1 & a<x\le\infty.\end{cases}$$

---
1 Sehgal and Bharucha-Reid
2 Hadzic
3 Choudhury and Das
4 Khan
5 Babacev
6 Su and Zhang

تعریف ۴. فرض کنیم X مجموعه‌ی ناتهی، F تابعی از $X\times X$ بتوی Γ^+ باشد. برای هر p و q متعلق به $X\times X$، $F(p,q)$ را با $F_{p,q}$ نشان می‌دهیم. زوج مرتب (X,F) را فضای متریک احتمال گوئیم هرگاه برای هر $p,q,r\in X$ شرایط زیر برقرار باشند:

الف) $F_{p,q}=F_{q,p}$،

ب) برای هر $x>۰$، $F_{p,q}(x)=۱$ اگر و تنها اگر $p=q$، یا به‌عبارت دیگر $p=q \Leftrightarrow F_{p,q}=\varepsilon_۰$.

پ) برای هر $p,q,r\in X$ و هر $x,y\geq ۰$، اگر $F_{p,q}(x)=۱$ و $F_{q,r}(y)=۱$، آنگاه $F_{p,r}(x+y)=۱$.

تعریف ۵. نگاشت $\Delta:[۰,۱]\times[۰,۱]\to[۰,۱]$ را $t-$نرم گوییم، هرگاه شرکت‌پذیر، جابجایی و روی هر مؤلفه نانزولی، همچنین ۱ عنصر همانی Δ باشد. نگاشت‌های $\Delta_m(a,b)=\min\{a,b\}$ و $\Delta_p(a,b)=ab$، مثال‌هایی از $t-$نرم پیوسته می‌باشند. با توجه به‌ترتیب نقطه‌ای برای هر $t-$نرم Δ، داریم $\Delta\leq\Delta_m$.

تعریف ۶. سه‌تایی (X,F,Δ) را فضای متریک احتمال مِنجر گوئیم هرگاه (X,F) یک فضای متریک احتمال و Δ یک $t-$نرم باشد به‌طوری‌که برای هر $p,q,r\in X$ و هر $x,y\geq ۰$ داشته باشیم:

$$F_{p,r}(x+y)\geq\Delta(F_{p,q}(x),F_{q,r}(y)).$$

تعریف ۷. (ε,λ)-توپولوژی در فضای متریک احتمال مِنجر (X,F,Δ) توسط خانواده‌ای از همسایگی‌های نقاط $x\in X$،

$$N_x=\{N_x(\varepsilon,\lambda):\varepsilon>۰,\lambda\in(0,1)\}$$

معرفی می‌شود که

$$N_x(\varepsilon,\lambda)=\{y\in X\,|\,F_{x,y}(\varepsilon)>۱-\lambda\}.$$

تعریف ۸. فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر باشد، در این‌صورت دنباله (x_n) از عناصر X را همگرا به $x\in X$ گوئیم هرگاه برای هر $\varepsilon>۰$ و هر $۰<\lambda<۱$، یک $M(\varepsilon,\lambda)$ متعلق به $\mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $n\geq M(\varepsilon,\lambda)$، $F_{x_n,x}(\varepsilon)>۱-\lambda$.

تعریف ۹. فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر باشد، در این‌صورت دنباله (x_n) از عناصر X را کوشی گوئیم هرگاه برای هر $\varepsilon>۰$ و هر $۰<\lambda<۱$، یک $M(\varepsilon,\lambda)$ متعلق به $\mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $n\geq M(\varepsilon,\lambda)$ و برای هر $r\in\mathbb{N}$، $F_{x_n,x_{n+r}}(\varepsilon)>۱-\lambda$.

تعریف ۱۰. فضای متریک احتمال مِنجر (X,F,Δ) را کامل گوئیم هرگاه هر دنباله کوشی در X همگرا به نقطه‌ای در X باشد.

مثال ۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و برای هر $x,y\in X$ و هر $t\geq ۰$ نگاشت $F:X\times X\to\Gamma^+$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$F_{x,y}(t)=\varepsilon_۰(t-d(x,y)),$$

در این‌صورت (X,F,Δ_m) یک فضای متریک احتمال مِنجر است.

لم ۱. ([۱۵]) فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر باشد، در این‌صورت F برای هر $t>۰$ ثابت، نیم‌پیوسته پایینی است. به‌عبارت دیگر، اگر $t>۰$، (x_n) و (y_n) دنباله‌هایی در X باشند به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ و $\lim_{n\to\infty}y_n=y$،

آنگاه

$$\liminf_{n\to\infty} F_{x_n,y_n}(t) = F_{x,y}(t).$$

تعریف ۱۱. نگاشت $\psi:[\circ,\infty)\to[\circ,\infty)$ را یک $\Psi-$تابع گوئیم هرگاه ψ دوسویی باشد، $\psi(\circ)=\circ$ و برای هر $t>\circ$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}\psi^{-n}(t)=\infty$.

تعریف ۱۲. فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر و $f:X\to X$ یک نگاشت باشد. در این‌صورت f را یک نگاشت $(\alpha,\psi)-$انقباضی گوئیم هرگاه دو تابع $\alpha:X\times X\times[\circ,\infty)\to[\circ,\infty]$ و $\psi\in\Psi$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر $x,y\in X$ و هر $t>\circ$ داشته باشیم:

$$\alpha(x,y,t)F_{fx,fy}(\psi(t))\geq F_{x,y}(t).$$

تعریف ۱۳. فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر باشد. نگاشت‌های $f:X\to X$ و $\alpha:X\times X\times[\circ,\infty)\to[\circ,\infty]$ را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت f را یک نگاشت $\alpha-$قابل قبول گوئیم هرگاه برای هر $x,y\in X$ و هر $t>\circ$ داشته باشیم:

$$\alpha(x,y,t)\leq 1 \Rightarrow \alpha(fx,fy,t)\leq 1.$$

مثال ۲. فرض کنیم $X=[1,\infty)$ و $f:X\to X$ نگاشتی باشد که به‌صورت $f(x)=\sqrt{x}$ تعریف شده باشد. همچنین نگاشت $\alpha:X\times X\times[\circ,\infty)\to[\circ,\infty]$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\alpha(x,y,t)=\begin{cases} e^{x-y} & x\geq y,\\ \circ & x<y.\end{cases}$$

در این‌صورت f یک نگاشت $\alpha-$قابل قبول است.

تعریف ۱۴. فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر باشد. نگاشت $p:X\times X\times[\circ,\infty)\to[\circ,1]$ را یک $r-$فاصله روی X گوئیم هرگاه p در شرایط زیر صدق کند:

(p_1) برای هر $x,y,z\in X$ و هر $t,s\geq\circ$ داشته باشیم $p_{x,z}(t+s)\geq\Delta(p_{x,y}(t),p_{y,z}(s))$.

(p_2) p نسبت به متغیر دوم نیم‌پیوسته پایینی باشد، یعنی اگر $x\in X$ و $\lim_{n\to\infty}y_n=y$، آنگاه برای هر $t\geq\circ$ داشته باشیم:

$$\liminf_{n\to\infty} p_{x,y_n}(t)=p_{x,y}(t).$$

(p_3) برای هر $\varepsilon\in(\circ,1)$ یک $\delta\in(\circ,1)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که اگر $p_{z,x}(t)\geq 1-\delta$ و $p_{z,y}(s)\geq 1-\delta$، آنگاه $F_{x,y}(t+s)\geq 1-\varepsilon$.

همچنین قرارداد می‌کنیم که $p(\infty)=1$.

مثال ۳. فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر باشد، در این‌صورت $p=F$ یک $r-$فاصله روی X است.

تعریف ۱۵. فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر با $r-$فاصله p، $f:X\to X$ یک نگاشت باشد و $\psi\in\Psi$ به‌طوری‌که برای هر $x,y\in X$ و هر $t>\circ$ داشته باشیم:

$$p_{fx,fy}(\psi(t))\geq p_{x,y}(t),$$

در این‌صورت f را یک نگاشت $(\psi,p)-$انقباضی گوئیم. اگر $p=F$، آنگاه f را یک نگاشت $\psi-$انقباضی می‌نامیم.

لم ۲. فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر و p یک $r-$فاصله روی X باشد.

همچنین فرض کنیم (x_n) و (y_n) دنباله‌هایی در X و (α_n) و (β_n) دنباله‌هایی همگرا به یک در $[0,1]$ باشند. در این‌صورت برای هر $x,y,z\in X$ داریم:

الف) اگر برای هر $n\in\mathbb{N}$ و هر $t,s>0$ داشته باشیم $p_{x_n,y}(t)\geq\alpha_n$ و $p_{x_n,z}(s)\geq\beta_n$، آنگاه $z=y$.
به‌ویژه اگر $p_{x,y}(t)=1=p_{x,z}(s)$، آنگاه $z=y$.

ب) اگر برای هر $n\in\mathbb{N}$ و هر $t,s>0$ داشته باشیم $p_{x_n,y_n}(t)\geq\alpha_n$ و $p_{x_n,y}(s)\geq\beta_n$، آنگاه دنباله (y_n) همگرا به y است.

پ) اگر برای هر $n\in\mathbb{N}$، هر $r\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ و هر $t>0$ داشته باشیم $p_{x_n,x_{n+r}}(t)\geq\alpha_n$، آنگاه (x_n) یک دنباله کوشی است.

برهان. (ب) فرض کنیم $\varepsilon\in(0,1)$. چون $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=1=\lim_{n\to\infty}\beta_n$ پس $n_0\in\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $n\geq n_0$، $\alpha_n>1-\delta$ و $\beta_n>1-\delta$، بنابراین

$$p_{x_n,y_n}(t)\geq\alpha_n>1-\delta,\qquad (\forall t>0),$$
$$p_{x_n,y}(s)\geq\beta_n>1-\delta,\qquad (\forall s>0),$$

لذا طبق تعریف r−فاصله نتیجه می‌گیریم که $F_{y_n,y}(t+s)\geq 1-\varepsilon$ درنتیجه $\lim_{n\to\infty}y_n=y$.

(الف) با قرار دادن $(y_n=z)$ در قسمت (ب) نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

(پ) فرض کنیم $\varepsilon\in(0,1)$. چون $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=1$ پس $n_0\in\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $n\geq n_0$، $\alpha_n>1-\delta$. بنابراین

$$p_{x_{n_0},x_n}(t)\geq\alpha_n>1-\delta,\qquad (\forall t>0),$$
$$p_{x_{n_0},x_{n+r}}(s)\geq\alpha_n>1-\delta,\qquad (\forall s>0),$$

لذا $F_{x_n,x_{n+r}}(t+s)\geq 1-\varepsilon$، درنتیجه (x_n) یک دنباله کوشی است. □

۲ نگاشت‌های (α,ψ,p)-انقباضی

تعریف ۱۶. فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر با r−فاصله p و $f:X\to X$ یک نگاشت باشد. در این‌صورت f را یک نگاشت (α,ψ,p)−انقباضی گوئیم هرگاه دو تابع $\alpha:X\times X\times[0,\infty)\to[0,\infty]$ و $\psi\in\Psi$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر $x,y\in X$ و هر $t>0$ داشته باشیم:

$$\alpha(x,y,t)p_{fx,fy}(\psi(t))\geq p_{x,y}(t).\qquad (1)$$

تذکر ۱. اگر در رابطه (۱) قرار دهیم $p=F$، آنگاه نگاشت (α,ψ,p)−انقباضی به یک نگاشت (α,ψ)−انقباضی تبدیل می‌شود.

قضیه ۱. فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر کامل باشد به‌طوری‌که Δ یک t−نرم پیوسته است، p یک r−فاصله روی X و $f:X\to X$ یک نگاشت (α,ψ,p)−انقباضی باشد. همچنین فرض کنیم شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) f یک نگاشت α−قابل قبول باشد،

(ب) نقطه $x_0\in X$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $t>0$، $\alpha(x_0,fx_0,t)\leq 1$،

(پ) یا f پیوسته باشد یا برای هر دنباله (x_n) در X که $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ و برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\alpha(x_n,x_{n+1},t)\leq 1$. در این‌صورت برای هر $n\in\mathbb{N}$ داشته باشیم:

$\alpha(x_n,x,t)\leq 1$.

در این‌صورت یک نقطه $u\in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $fu=u$. علاوه بر این اگر $\alpha(u,u,t)\leq 1$، آنگاه $p_{u,u}(t)=1$.

برهان. با توجه به قسمت (ب)، نقطه $x_0\in X$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $t>0$، $\alpha(x_0,fx_0,t)\leq 1$. دنباله (x_n) در X را برای هر $n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ به‌صورت $x_{n+1}=fx_n=f^{n+1}x_0$ در نظر می‌گیریم. اگر برای یک $n_0\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ داشته باشیم $x_{n_0+1}=x_{n_0}$، آنگاه $x_{n_0}=x_{n_0+1}=fx_{n_0}$ لذا $u=x_{n_0}$ یک نقطه ثابت از f می‌باشد و اثبات تمام می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم برای هر $n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$، $x_{n+1}\neq x_n$. چون f یک نگاشت $\alpha-$قابل قبول است، داریم:

$$\alpha(x_0,x_1,t)=\alpha(x_0,f\,x_0,t)\leq 1$$
$$\Rightarrow \alpha(f\,x_0,f\,x_1,t)=\alpha(x_1,x_2,t)\leq 1,$$

با ادامه این روند برای هر $n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ و $t>0$ نتیجه می‌گیریم:

$$\alpha(x_n,x_{n+1},t)\leq 1. \qquad (2)$$

حال نشان می‌دهیم که $\lim_{n\to\infty}p_{x_n,x_{n+1}}(t)=1$. با استفاده از روابط (۱) و (۲) برای هر $n\in\mathbb{N}$ و $t>0$ داریم:

$$\begin{aligned} p_{x_n,x_{n+1}}(t) &= p_{fx_{n-1},f\,x_n}(t) \\ &\geq \alpha(x_{n-1},x_n,t)p_{fx_{n-1},f\,x_n}(t) \\ &\geq p_{x_{n-1},x_n}(\psi^{-1}(t)). \end{aligned} \qquad (3)$$

با تکرار این روند برای هر $n\in\mathbb{N}$ به‌دست می‌آوریم:

$$p_{x_n,x_{n+1}}(t)\geq p_{x_0,x_1}(\psi^{-n}(t)). \qquad (4)$$

با حدگیری از رابطه (۴) و با استفاده از تعریف تابع ψ نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty}p_{x_n,x_{n+1}}(t)=1. \qquad (5)$$

حال نشان می‌دهیم (x_n) یک دنباله کوشی است. فرض کنیم $n\in\mathbb{N}$ و $r\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$، در این‌صورت با r بار استفاده از نامساوی مثلث نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} & p_{x_n,x_{n+r}}(t) \\ & \geq \Delta\left(p_{x_n,x_{n+1}}(\frac{t}{r}),p_{x_{n+1},x_{n+2}}(\frac{t}{r}),\ldots,p_{x_{n+r-1},x_{n+r}}(\frac{t}{r})\right), \end{aligned}$$

با حدگیری از طرفین رابطه فوق و طبق (۵) داریم:

$$\lim_{n\to\infty}p_{x_n,x_{n+r}}(t)=1, \qquad (6)$$

لذا با توجه به قسمت سوم لم ۲، (x_n) یک دنباله کوشی در فضای کامل (X,F,Δ) است. بنابراین نقطه $u\in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty}x_n=u$. ادعا می‌کنیم که u نقطه ثابت f می‌باشد. اگر f پیوسته باشد، آنگاه داریم:

$$u=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}fx_n=fu,$$

لذا u یک نقطه ثابت از f می‌باشد. در غیر این‌صورت با استفاده از قسمت دوم فرض (پ) قضیه و رابطه (۲) برای هر $n\in\mathbb{N}$ و $t>0$ خواهیم داشت:

$$\alpha(x_n,u,t)\leq 1. \qquad (7)$$

چون p یک $r-$فاصله است، از شرط (p_2) برای هر $n\in\mathbb{N}$ و $t>0$ نتیجه می‌گیریم که:

$$p_{x_n,u}(t)=\liminf_{m\to\infty}p_{x_n,x_m}(t):=\alpha_n.$$

از طرفی از رابطه (۶) داریم $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=1$، بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}p_{x_n,u}(t)=1, \qquad (\forall t>0). \qquad (8)$$

از رابطه‌های (۱) و (۷) برای هر $n\in\mathbb{N}$ و $t>0$ داریم:

$$\begin{aligned} p_{x_n,fu}(t) &= p_{fx_{n-1},fu}(t) \\ &\geq \alpha(x_n,u,t)p_{fx_{n-1},fu}(t) \\ &\geq p_{x_{n-1},u}(\psi^{-1}(t)), \end{aligned}$$

با حدگیری از طرفین رابطه اخیر و استفاده رابطه (۸) داریم:

$$\lim_{n\to\infty} p_{x_n,fu}(t)=1. \qquad (۹)$$

لذا با استفاده از قسمت اول لم ۲ و روابط (۸) و (۹) نتیجه می‌گیریم $fu=u$. سرانجام فرض می‌کنیم $\alpha(u,u,t)\le 1$، نشان می‌دهیم $p_{u,u}(t)=1$. (فرض خلف) فرض می‌کنیم $t_0>0$ وجود داشته باشد که $p_{u,u}(t_0)<1$، در این‌صورت با استفاده از شرط انقباضی (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} p_{u,u}(t_0) &\ge \alpha(u,u,t)p_{fu,fu}(t_0)\\ &\ge p_{u,u}(\psi^{-1}(t_0)). \end{aligned}$$

با n بار تکرار این روند برای هر $n\in\mathbb{N}$ و $t_0>0$ داریم:

$$p_{u,u}(t_0)\ge p_{u,u}(\psi^{-n}(t_0)),$$

با حدگیری از طرفین رابطه اخیر و استفاده از تعریف ψ نتیجه می‌گیریم $p_{u,u}(t_0)\ge 1$ که این با فرض $p_{u,u}(t_0)<1$ در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و برای هر $t>0$ داریم $p_{u,u}(t)=1$. □

مثال ۴. فرض کنیم $X=[1,\infty)$ و برای هر $x,y\in X$ و هر $t>0$ نگاشت $F:X\times X\to\Gamma^+$ به‌صورت

$$F_{x,y}(t)=\frac{t}{t+|x-y|}$$

تعریف شده باشد. در این‌صورت (X,F,Δ_m) یک فضای متریک احتمال مِنجر کامل است. فرض کنیم p یک r–فاصله روی X باشد که به‌صورت $p_{x,y}=F_{x,y}$ تعریف شده است و برای هر $t\in[0,\infty)$، $\psi(t)=\frac{4}{5}t$. همچنین فرض کنیم نگاشت‌های $f:X\to X$ و $\alpha:X\times X\times[0,\infty)\to[0,\infty]$ به‌صورت زیر تعریف شده باشند:

$$fx=\frac{4}{5}\ln x+1,$$

$$\alpha(x,y,t)=\begin{cases}1 & x\in[1,2],\\ \infty & o.\omega.\end{cases}$$

اگر $x,y\in[1,2]$ و $t>0$، آنگاه طبق تعریف α، $\alpha(x,y,t)=1$. از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} p_{fx,fy}(\psi(t)) &= \frac{\frac{4}{5}t}{\frac{4}{5}t+|\frac{4}{5}\ln x+1-\frac{4}{5}\ln y-1|}\\ &=\frac{t}{t+|\ln x-\ln y|}\\ &\ge\frac{t}{t+|x-y|}\\ &=p_{x,y}(t), \end{aligned}$$

بنابراین

$$\alpha(x,y,t)p_{fx,fy}(\psi(t))\ge p_{x,y}(t).$$

اگر $x\notin[1,2]$ یا $y\notin[1,2]$ و $t>0$، آنگاه طبق تعریف α، $\alpha(x,y,t)=\infty$ و بنابراین رابطه

$$\alpha(x,y,t)p_{fx,fy}(\psi(t))\ge p_{x,y}(t)$$

برقرار است. لذا f یک نگاشت (α,ψ,p)–انقباضی است. حال نشان می‌دهیم f یک نگاشت α–قابل قبول است. فرض کنیم $x,y\in X$ و $t>0$ به‌طوری‌که $\alpha(x,y,t)\le 1$، لذا طبق تعریف α، $x,y\in[1,2]$ و با توجه به تعریف f داریم:

$$fx=\frac{4}{5}\ln x+1\in[1,2],$$

$$fy=\frac{4}{5}\ln y+1\in[1,2],$$

درنتیجه $\alpha(fx,fy,t)\le 1$، پس f یک نگاشت α–قابل قبول است. علاوه بر این برای هر

$x_\circ \in [1,2]$ داریم $fx_\circ \in [1,2]$ که طبق تعریف α نتیجه می‌شود $\alpha(x_\circ, f x_\circ, t) \le 1$. بنابراین همه فرضیات قضیه قبل برقرار است و $x = 1$ نقطه ثابت f می‌باشد.

قضیه ۲. فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر کامل باشد به‌طوری‌که Δ یک t−نرم پیوسته است، p یک r−فاصله روی X و $f : X \to X$ یک نگاشت (α,ψ,p)−انقباضی باشد. همچنین فرض کنیم شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) f یک نگاشت α−قابل قبول باشد،

(ب) نقطه $x_\circ \in X$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $t > \circ$، $\alpha(x_\circ, fx_\circ, t) \le 1$،

(پ) برای هر $y \in X$ و هر $t > \circ$ که $y \ne fy$ داشته باشیم:

$$\sup\left\{\Delta\left(p_{x,y}(t), p_{x,fx}(t)\right) : x \in X\right\} < 1.$$

در این‌صورت یک نقطه $u \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $fu = u$. علاوه بر این اگر $\alpha(u,u,t) \le 1$، آنگاه $p_{u,u}(t) = 1$.

برهان. همانند برهان قضیه ۱، می‌توانیم نشان دهیم که (x_n) یک دنباله کوشی در فضای متریک احتمال مِنجر کامل (X,F,Δ) است، پس $u \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} x_n = u$. حال نشان می‌دهیم u نقطه ثابت f می‌باشد. (فرض خلف) فرض کنیم $u \ne fu$، در این‌صورت با توجه به شرط (پ) و رابطه‌های (۵) و (۸) قضیه قبل داریم:

$$\begin{aligned} 1 &> \sup\left\{\Delta\left(p_{x_n,u}(t), p_{x_n,fx_n}(t)\right) : x \in X\right\} \\ &= \sup\left\{\Delta\left(p_{x_n,u}(t), p_{x_n,x_{n+1}}(t)\right) : n \in \mathbb{N}\right\} \\ &= 1, \end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین $u = fu$. بخش دوم برهان مانند برهان قضیه ۱ است که به منظور جلوگیری از تکرار حذف شده است. □

تعریف ۱۷. فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر و $\alpha : X\times X\times[\circ,\infty) \to [\circ,\infty]$ یک نگاشت باشد. گوئیم X دارای ویژگی (H) است هرگاه برای هر $x,y \in X$ و هر $t > \circ$، یک $z \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\alpha(z,x,t) \le 1$ و $\alpha(z,y,t) \le 1$.

قضیه ۳. با افزودن ویژگی (H) به فرضیات قضیه ۱، نگاشت f دارای نقطه ثابت یکتا می‌باشد.

برهان. فرض کنیم u و v نقاط ثابت f باشند. طبق شرط (H) یک w در X وجود دارد که

$$\alpha(w,u,t) \le 1, \qquad \alpha(w,v,t) \le 1. \quad (۱۰)$$

طبق α−قابل قبول بودن f و رابطه (۱۰) داریم:

$$\alpha(w,u,t) \le 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha(f w, fu, t) \le 1,$$

لذا

$$\alpha(f^2 w, u, t) = \alpha(f(f w), fu, t) \le 1.$$

با ادامه این روند مشاهده می‌کنیم که $\alpha(f^n w, u, t) \le 1$ و همچنین به‌طور مشابه برای نقطه v داریم $\alpha(f^n w, v, t) \le 1$ و چون f یک نگاشت (α,ψ,p)−انقباضی است، پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $t > \circ$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} p_{f^{n+1}w,u}(t) &= p_{f(f^n w),fu}(t) \\ &\geq \alpha(f^n w,u,t)p_{f(f^n w),fu}(t) \\ &\geq p_{f^n w,u}(\psi^{-1}(t)). \end{aligned}$$

با ادامه این روند داریم:

$$p_{f^{n+1}w,u}(t) \geq p_{f w,u}(\psi^{-n}(t)),$$

به‌طور مشابه برای هر $n \in \mathbb{N}$ به‌دست می‌آوریم:

$$p_{f^{n+1}w,v}(t) \geq p_{f w,v}(\psi^{-n}(t)),$$

با حدگیری از طرفین دو رابطه اخیر و ویژگی تابع ψ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} p_{f^{n+1}w,u}(t) = \lim_{n\to\infty} p_{f^{n+1}w,v}(t) = 1,$$

با استفاده از قسمت اول لم ۲ نتیجه می‌گیریم که $u = v$. □

قضیه ۴. فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر کامل باشد به‌طوری‌که Δ یک t–نرم پیوسته است، p یک r–فاصله روی X و $f : X \to X$ یک نگاشت (ψ,p)–انقباضی باشد. در این‌صورت یک نقطه $u \in X$ یکتا وجود دارد به‌طوری‌که $fu = u$. علاوه بر این $p_{u,u}(t) = 1$.

برهان. با قرار دادن $\alpha(x,y,t) = 1$ در قضیه قبل نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. □

با قرار دادن $p = F$ در قضیه ۴، چهار نتیجه زیر را به‌دست می‌آوریم.

نتیجه ۱. فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر کامل باشد به‌طوری‌که Δ یک t–نرم پیوسته است. همچنین فرض کنیم $f : X \to X$ یک نگاشت ψ–انقباضی باشد. در این‌صورت f یک نقطه ثابت یکتا در X دارد.

نتیجه ۲. فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر کامل باشد به‌طوری‌که Δ یک t–نرم پیوسته است، p یک r–فاصله روی X و $f : X \to X$ یک نگاشت باشد. همچنین فرض کنیم برای هر $x,y \in X$ و هر $t > 0$، یک $k \in [0,1)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$p_{fx,fy}(kt) \geq p_{x,y}(t),$$

در این‌صورت یک نقطه $u \in X$ یکتا وجود دارد به‌طوری‌که $fu = u$. علاوه بر این $p_{u,u}(t) = 1$.

نتیجه ۳. فرض کنیم (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر کامل باشد به‌طوری‌که Δ یک t–نرم پیوسته است. همچنین فرض کنیم $f : X \to X$ یک نگاشت باشد به‌طوری‌که برای هر $x,y \in X$ و هر $t > 0$، یک $k \in [0,1)$ وجود داشته باشد که

$$F_{fx,fy}(kt) \geq F_{x,y}(t),$$

در این‌صورت f یک نقطه ثابت یکتا در X دارد.

تعریف ۱۸. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. در این‌صورت $(X,F,\Delta,\preceq)$ را یک فضای متریک احتمال مِنجر مرتب جزئی می‌نامیم هرگاه (X,F,Δ) یک فضای متریک احتمال مِنجر و $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد.

نتیجه ۴. فرض کنیم $(X,F,\Delta,\preceq)$ یک فضای متریک احتمال مِنجر مرتب جزئی کامل باشد به‌طوری‌که Δ یک t–نرم پیوسته است، p یک r–فاصله روی X و $f : X \to X$ نگاشتی (ψ,p)–انقباضی پیوسته و

نانزولی نسبت به $\preceq$ باشد. همچنین فرض کنیم $x_0 \in X$ موجود باشد به‌طوری‌که $x_0 \preceq fx_0$. در این‌صورت یک نقطه $u \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $fu = u$. علاوه بر این $p_{u,u}(t) = 1$.

برهان. نگاشت $\alpha : X \times X \times [0,\infty) \to [0,\infty]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(x,y,t) = \begin{cases} 1 & x \preceq y, \\ \infty & \text{o.w.} \end{cases}$$

برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ که $x \preceq y$، طبق تعریف α داریم $\alpha(x,y,t) = 1$، لذا

$$\alpha(x,y,t) p_{fx,fy}(\psi(t)) \geq p_{x,y}(t),$$

در غیر این‌صورت $\alpha(x,y,t) = \infty$، پس

$$\alpha(x,y,t) p_{fx,fy}(\psi(t)) \geq p_{x,y}(t)$$

بنابراین f یک نگاشت (α,ψ,p)−انقباضی است. چون f نانزولی است، با توجه به تعریف α به‌وضوح f یک نگاشت α−قابل قبول است. از طرفی طبق فرض $x_0 \in X$ موجود است به‌طوری‌که $x_0 \preceq fx_0$ که این یعنی $\alpha(x_0, fx_0, t) \leq 1$. بنابراین تمام فرضیات قضیه ۱ برقرار است، درنتیجه f یک نقطه ثابت مانند $u \in X$ دارد به‌طوری‌که $p_{u,u}(t) = 1$. □

نتیجه ۵. فرض کنیم A_1 و A_2 زیرمجموعه‌های بسته و ناتهی از فضای متریک احتمال مِنجر کامل (X, F, Δ) مجهز به r−فاصله p باشند به‌طوری‌که $X = A_1 \bigcup A_2$ و f یک خودنگاشت روی X باشد. همچنین فرض کنیم شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) $f(A_1) \subseteq A_2$ و $f(A_2) \subseteq A_1$،

(ب) یک $\psi \in \Psi$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $(x,y) \in (A_1 \times A_2) \bigcup (A_2 \times A_1)$،

$$p_{fx,fy}(\psi(t)) \geq p_{x,y}(t),$$

در این‌صورت f یک نقطه ثابت مانند $u \in A_1 \bigcap A_2$ دارد. علاوه بر این $p_{u,u}(t) = 1$.

برهان. نگاشت $\alpha : X \times X \times [0,\infty) \to [0,\infty]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(x,y,t) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in (A_1 \times A_2) \bigcup (A_2 \times A_1), \\ \infty & \text{o.w.} \end{cases}$$

برای هر $(x,y) \in (A_1 \times A_2) \bigcup (A_2 \times A_1)$ داریم $\alpha(x,y,t) = 1$، لذا برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ نتیجه می‌گیریم:

$$\alpha(x,y,t) p_{fx,fy}(\psi(t)) \geq p_{x,y}(t),$$

بنابراین f یک نگاشت (α,ψ,p)−انقباضی است. از طرفی با استفاده از قسمت (الف) و با توجه به تعریف α به‌وضوح f یک نگاشت α−قابل قبول است. حال فرض کنیم (x_n) دنباله‌ای در X باشد به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $t > 0$، $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ و $\alpha(x_n, x_{n+1}, t) \leq 1$. با استفاده از تعریف α و قسمت (الف) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $(x_{2k-1}, x_{2k}) \in A_1 \times A_2$ یا $(x_{2k-1}, x_{2k}) \in A_2 \times A_1$. چون (x_{2k-1}) و (x_{2k}) زیردنباله‌هایی از دنباله همگرای (x_n) هستند و A_1 و A_2 زیرمجموعه‌های بسته از X می‌باشند، پس $x \in A_1 \bigcap A_2$، که طبق تعریف α یعنی $\alpha(x_n, x, t) \leq 1$. بنابراین تمام فرضیات قضیه ۱ برقرار است و در نتیجه f یک نقطه ثابت مانند $u \in X$ دارد. چون $X = A_1 \bigcup A_2$ و با استفاده از شرط (الف) نتیجه می‌گیریم که $u \in A_1 \bigcap A_2$ و با استفاده از تعریف α، $\alpha(u,u,t) \leq 1$ و در نتیجه $p_{u,u}(t) = 1$. □

References

[1] K. Menger, Statistical metrics, Proc. Nat. Acad. Sci., 28 (1942) 535-537.

[2] B. Schweizer, A. Sklar, Probabilistic metric spaces, in: North Holland Series in Probability and Applied Mathematics, Oxford, 1983 and the new edition in Dover Books on Mathematics, Dover, New York, Amsterdam, 2005.

[3] V. Sehgal, A.T. Bharucha-Reid, Fixed points of contraction mappings on probabilistic metric spaces, Theory Comput. Syst., 6 (1972) 97-102.

[4] O. Hadzic, Some theorems on the fixed points in probabilistic metric and random normed spaces, Boll. Un. Mat. Ital, 13 (1981) 18.

[5] I. Golet, On contractions in probabilistic metric spaces, Radovi Math., 13 (2004) 87-92.

[6] D. Mihet, A class of Sehgal's contractions in probabilistic metric spaces, An. Univ. Vest. Timisoara Ser. Mat. Inf., 37 (1999) 105-110.

[7] B.S. Choudhury, K. Das, A new contraction principle in Menger spaces, Acta Math. Sinica, English Series, 24 (2008) 1379.

[8] M.S. Khan, M. Swaleh, S. Sessa, Fixed point theorems by altering distances between the points, Bull. Aust. Math. Soci., 30 (1984) 1-9.

[9] N.A. Babačev, Nonlinear generalized contractions on Menger PM spaces, Appl. Anal. Discrete Math., (2012) 257-264.

[10] Y. Su, J. Zhang, Fixed point and best proximity point theorems for contractions in new class of probabilistic metric spaces, Fixed Point Theory Appl., 2014 (2014).

[11] A.N.A. Abdou, Y.J. Cho, R. Saadati, Distance type and common fixed point theorems in Menger probabilistic metric type spaces, Appl. Math. Comput., 265 (2015) 1145-1154.

[12] D. Oregan, S.M. Vaezpour, J.K. KIM, Generalized distance and common fixed point theorems in Menger probabilistic metric spaces, Bull. Iran. Math. Soc., 35 (2009) 97-117.

[13] R. Saadati, Generalized distance and fixed point theorems in partially ordered probabilistic metric spaces, Matematički vesnik, 65 (2013) 82-93.

[14] N. Shobkolaei, S.M. Vaezpour, S. Sedghi, Fixed Points Theorems with respect to\fuzzy w-distance, Iran. J. Fuzzy Syst., 11 (2014) 103-112.

[15] S.-S. Chang, Y.J. Cho, S.-M. Kang, Nonlinear Operator Theory in Probablistic Metric Spaces, Nova Publishers, 2001.