Complex and Nonlinear Systems
Vol. 1, No. 2, Winter 2018, pp. 47-52

سیستم‌های مختلط و غیرخطی
سال ۱، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۶، صص ۴۷ تا ۵۲

زیر رده‌های خاص از توابع دو–مقداری وابسته به عملگر کوماتو

سمیرا رهروی[۱،*]، حسین پیری[۲]

۱. استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه بناب
۲. دانشیار، گروه ریاضی، دانشگاه بناب

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۵/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۱/۱۴

Certain subclasses of bi-univalent functions associated with Komatu operator

Samira Rahrovi[1,*], Hossein Piri[2]

1. Assistant Professor, Department of Mathematics, University of Bonab
2. Associate Professor, Department of Mathematics, University of Bonab

Received: 7/25/2017 Accepted: 2/3/2018

چکیده: فرض کنیم Σ رده توابع دو–مقداری تعریف شده در قرص یکه U باشد. در این تحقیق زیررده‌های جدیدی از توابع رده Σ وابسته به عملگر کوماتو را معرفی نموده و تقریبی برای ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ می‌یابیم. همچنین نتایج جدیدی وابسته به رده‌های مذکور را به‌دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: تابع دو–مقداری، تابع ستاره‌گون، تابع محدب از مرتبه‌ی α، عملگر کوماتو، عملگر سالاگین.

Abstract: In the present paper, we introduce and investigate new subclasses of the function class Σ of bi-univalent functions defined on the open unit disk U which are associated with the Komatu operator. Furthermore, we find some estimations on the coefficients $|a_2|$ and $|a_3|$ for functions in these new subclasses. Several new consequences of the results are also pointed out.

Keywords: bi-univalent function, Starlike function, Convex function of order α, Komatu operator, Salagean operator.

۱ مقدمه

A را رده توابع تحلیلی بر قرص یکه $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ به فرم زیر در نظر بگیرید:

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \qquad (1)$$

فرض کنید زیررده S از A، زیر رده توابع تک‌مقداری بر U باشد. تابع $f\in S$ ستاره‌گون از مرتبه α $(0\le\alpha<1)$ در U نامیده می‌شود، هرگاه

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha.$$

این رده با نماد $S^*(\alpha)$ نشان داده می‌شود. تابع $f\in A$ محدب از مرتبه α بر U نامیده می‌شود، هرگاه

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha.$$

$K(\alpha)$ برای نمایش چنین رده‌ای به کار برده می‌شود.

*Corresponding author: sarahrovi@gmail.com

*نویسنده مسئول

اخیراً کوماتو[1] [۱]، عملگر انتگرالی L_a^λ را به فرم زیر معرفی نموده است:

$$L_a^\lambda f(z)=\frac{a^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^1 t^{a-2}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{\lambda-1} f(zt)dt,\quad z\in U, a>0,\lambda\ge 0 \tag{۲}$$

لذا، اگر $f\in A$ دارای نمایشی به فرم $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ باشد، به سادگی از رابطه (۲) داریم:

$$L_a^\lambda f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{a+n-1}\right)^\lambda a_n z^n,\quad a>0,\lambda\ge 0$$

تذکر ۱. از نمایش عملگر L_a^λ به فرم سری می‌توان عملگر L_a^λ را برای هر λ حقیقی تعریف نمود [۲]. همچنین از تعریف عملگر L_a^λ به فرم سری، رابطه زیر به سادگی حاصل می‌شود:

$$z\left(L_a^{\lambda+1}f(z)\right)'=aL_a^\lambda f(z)-(a-1)L_a^{\lambda+1}f(z),\quad a>0,\lambda\ge 0$$

توجه شود که:

(الف) برای $a=1$ و $\lambda=k$ (kعدد صحیح دلخواه) عملگر ضربی $L_1^\lambda=I^k$ به‌دست می‌آید که توسط فلت[2] [۳] و سالاگین[3] در [۴] بررسی شده است.

(ب) برای $a=1$ و $\lambda=-k$ $k\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\dots\}$ عملگر دیفرانسیل $L_1^{-k}=D^k$ معروف به عملگر سالاگین [۴] به‌دست می‌آید.

(ج) برای $a=2$ و $\lambda=k$ (kعدد صحیح دلخواه) عملگر $L_2^k=L^k$ به‌دست می‌آید که توسط رالجدی[4] و سومانتا[5] در [۵] بررسی شده است.

(د) برای $a=2$، عملگر ضربی $L_2^\lambda=I^\lambda$ حاصل می‌گردد که توسط جونگ[6] و همکاران در [۶] بررسی شده است.

برای هر $f\in S$، قضیه‌ی $\frac{1}{4}$-کوبه بیان می‌کند که تصویر U تحت f، شامل قرصی به شعاع $\frac{1}{4}$ است. بنابراین هر تابع تک‌مقداری $f\in S$ دارای معکوسی مانند f^{-1} است که برای هر $z\in U$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$f^{-1}(f(z))=z,\qquad z\in U$$

و

$$f\left(f^{-1}(w)\right)=w,\quad |w|<r(f),\ r(f)\ge\frac{1}{4}.$$

تعریف ۱. هرگاه توابع f و f^{-1} در U تک‌ارز باشند، تابع $f\in A$ دو–مقداری نامیده می‌شود. رده توابع دو–مقداری را با Σ نشان می‌دهیم.

اگر نگاشت f معرفی شده در رابطه (۱)، یک تابع دو–مقداری باشد، آنگاه با فرض $g=f^{-1}$ و انجام عملیات ساده داریم:

$$g(w)=w-a_2w^2+(2a_2^2-a_3)w^3-(5a_2^3-5a_2a_3+a_4)w^4+\cdots \tag{۳}$$

رده توابع دو–مقداری در قرص U را لوین[1] در [۷] معرفی نمود و نشان داد که برای هر

1 Komatu
2 Flett
3 Salagean

4 Uralegaddi
5 Somantha
6 Jung

$f(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}a_n z^n \in \Sigma$ داریم $|a_۲|<۱/۵۱$. بر این اساس، برانان[2] و کلونیه[3] [۸] برای هر $f\in\Sigma$، حدس $|a_۲|\le\sqrt{۲}$ را مطرح نمودند. نتانیاهو[4] [۹] نشان داد که برای هر $f\in\Sigma$ داریم $|a_۲|=\frac{۴}{۳}$. همچنین برانان و تاها[5] [۱۰] زیررده‌های خاصی از توابع دو-مقداری مشابه زیررده‌های توابع تک‌مقداری، شامل قویاً ستاره‌گون، ستاره‌گون و محدب را بررسی کردند. آنها رده توابع دو-ستاره‌گون و دو-محدب را معرفی نمودند و برای ضرایب ابتدایی آن تقریب‌هایی را به‌دست آوردند. اخیراً پژوهشگران بسیاری [۲, ۱۱, ۱۲] کران‌هایی را برای رده‌های متنوعی از توابع دو-مقداری به‌دست آورده‌اند.

متذکر می‌شویم که رده Σ تهی نیست، زیرا توابع

$$z,\frac{z}{۱-z},-\log(۱-z),\frac{۱}{۲}\log\frac{۱+z}{۱-z}$$

عضو رده Σ می‌باشند. با این وجود، تابع کوبه عضو رده Σ نیست.

لم ۱. فرض کنید P خانواده تمام توابع مانند h باشد که بر U تحلیلی است و به‌ازای هر $z\in U$، $\mathrm{Re}\left(h\left(z\right)\right)>۰$ و

$$h(z)=۱+c_۱z+c_۲z^۲+c_۳z^۳+\cdots. \qquad z\in U$$

اگر $h\in P$، آنگاه $|c_k|\le ۲$.

۲ تقریب ضرایب

تعریف ۲. فرض کنید $\boldsymbol{\alpha}$، $\boldsymbol{\gamma}$ و $\boldsymbol{\lambda}$ اعداد حقیقی باشد به‌طوری‌که $\lambda\ge۰$، $۰<\alpha<۱$، $۰\le\gamma\le۱$، تابع f توسط رابطه (۱) تعریف شده و $g\left(w\right)=f^{-۱}\left(w\right)$ به فرم (۳) باشد. تابع f را عضو رده $P_\Sigma(\gamma,\alpha,\lambda)$ گوییم، هرگاه در روابط

$$\left|\arg\left\{\frac{z\left(L_a^\lambda f(z)\right)'+\gamma z^۲\left(L_a^\lambda f(z)\right)''}{\left(۱-\gamma\right)L_a^\lambda f(z)+\gamma z\left(L_a^\lambda f(z)\right)'}\right\}\right|<\frac{\alpha\pi}{۲}, \quad (۴)$$

و

$$\left|\arg\left\{\frac{w\left(L_a^\lambda g(w)\right)'+\gamma w^۲\left(L_a^\lambda g(w)\right)''}{\left(۱-\gamma\right)L_a^\lambda g(w)+\gamma w\left(L_a^\lambda g(w)\right)'}\right\}\right|<\frac{\alpha\pi}{۲}, \quad (۵)$$

صدق کند.

قضیه ۱. اگر تابع f در کلاس $P_\Sigma(\gamma,\alpha,\lambda)$ باشد، آنگاه

$$|a_۲| \le \frac{۲\alpha}{\sqrt{۴\alpha(۲\gamma+۱)\left(\frac{a}{a+۲}\right)^{\lambda}-(\gamma+۱)^۲\left(\frac{a}{a+۱}\right)^{۲\lambda}(۳\alpha-۱)}} \quad (۶)$$

و

$$|a_۳|\le\frac{\alpha}{(۲\gamma+۱)\left(\frac{a}{a+۲}\right)^{\lambda}}+\frac{۴\alpha^۲}{(\gamma+۱)^۲\left(\frac{a}{a+۱}\right)^{۲\lambda}}.$$

برهان. فرض کنید $g=f^{-۱}$. چون $f\in P_\Sigma\left(\gamma,\alpha,\lambda\right)$، لذا از روابط (۴) و (۵) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{z\left(L_a^\lambda f(z)\right)'+\gamma z^۲\left(L_a^\lambda f(z)\right)''}{\left(۱-\gamma\right)L_a^\lambda f(z)+\gamma z\left(L_a^\lambda f(z)\right)'}=p(z)^\alpha, \quad (۷)$$

و

$$\frac{w\left(L_a^\lambda g(w)\right)'+\gamma w^۲\left(L_a^\lambda g(w)\right)''}{\left(۱-\gamma\right)L_a^\lambda g(w)+\gamma w\left(L_a^\lambda g(w)\right)'}=q(w)^\alpha, \quad (۸)$$

که در آن توابع $p(z)$ و $q(w)$ در کلاس P قرار دارند و به‌صورت زیر می‌باشند:

$$p(z)=۱+p_۱z+p_۲z^۲+\cdots, \qquad (۹)$$

---

[1] Lewin
[2] Brannan
[3] Clunie
[4] Netanyahu
[5] Taha

و

$$q(w)=1+q_1w+q_2w^2+\cdots. \tag{10}$$

از مساوی قرار دادن ضرایب در روابط (۷) و (۸) روابط زیر نتیجه می‌شوند:

$$(\gamma+1)\left(\frac{a}{a+1}\right)^{\lambda}a_2=\alpha p_1, \tag{11}$$

$$2(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}a_3-(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}a_2^2=\alpha p_2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}p_1^2, \tag{12}$$

$$-(\gamma+1)\left(\frac{a}{a+1}\right)^{\lambda}a_2=\alpha q_1, \tag{13}$$

$$2(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}(2a_2^2-a_3)-(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}a_2^2=\alpha q_2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}q_1^2. \tag{14}$$

از روابط (۱۱) و (۱۳) به‌دست می‌آوریم:

$$p_1=-q_1 \tag{15}$$

$$2(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}a_2^2=\alpha^2(p_1^2+q_1^2). \tag{16}$$

از جمع زدن طرفین روابط (۱۲) و (۱۴) نتیجه می‌شود

$$\left(4\alpha(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}-(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}(3\alpha-1)\right)a_2^2=\alpha^2(p_2+q_2),$$

لذا

$$a_2^2=\frac{\alpha^2(p_2+q_2)}{4\alpha(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}-(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}(3\alpha-1)}$$

با به‌کار بردن

لم ۱ برای ضرایب p_2 و q_2 به‌دست می‌آوریم:

$$|a_2|\le\frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}-(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}(3\alpha-1)}}$$

این رابطه همان کران تعریف شده برای $|a_2|$ در رابطه (۶) است.

حال کران $|a_3|$ را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور با تفریق (۱۴) از (۱۲) داریم:

$$4\alpha(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}(a_3-a_2^2)=\alpha(p_2-q_2). \tag{17}$$

از روابط (۱۵) و (۱۶) و (۱۷) نتیجه می‌شود

$$a_3=\frac{\alpha(p_2-q_2)}{4\alpha(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}}+\frac{\alpha^2(p_1^2+q_1^2)}{2(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}}.$$

با به‌کارگیری دوباره

لم ۱ برای ضرایب p_2 و q_2 رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$|a_3|\le\frac{\alpha}{(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}}+\frac{4\alpha^2}{(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}}.$$

لذا حکم اثبات می‌شود. □

تعریف ۳. فرض کنید $\boldsymbol{\beta}$، $\boldsymbol{\gamma}$ و $\boldsymbol{\lambda}$ اعداد حقیقی باشند به‌طوری که $\lambda\ge 0$، $0\le\gamma\le 1$، $0\le\beta\le 1$، f توسط رابطه (۱) تعریف شده باشد و g توسیع f^{-1} بر U باشد. تابع f عضو رده $H_\Sigma(\gamma,\beta,\lambda)$ نامیده می‌شود، هرگاه در روابط

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{z\left(L_a^{\lambda}f(z)\right)'+\gamma z^2\left(L_a^{\lambda}f(z)\right)''}{(1-\gamma)L_a^{\lambda}f(z)+\gamma z\left(L_a^{\lambda}f(z)\right)'}\right\}>\beta, \tag{18}$$

و

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{w\left(L_a^{\lambda}g(w)\right)'+\gamma w^2\left(L_a^{\lambda}g(w)\right)''}{(1-\gamma)L_a^{\lambda}g(w)+\gamma w\left(L_a^{\lambda}g(w)\right)'}\right\}>\beta, \tag{19}$$

صدق کند.

قضیه ۲. اگر تابع f، عضو رده $H_\Sigma(\gamma,\beta,\lambda)$ باشد،

آنگاه

$$|a_2| \le \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{2(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}-(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}}}, \qquad (۲۰)$$

و

$$|a_3| \le \frac{(1-\beta)}{(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}}+\frac{4(1-\beta)^2}{(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}}. \qquad (۲۱)$$

برهان. فرض کنید $f\in H_{\Sigma}(\gamma,\beta,\lambda)$ و $g=f^{-1}$. از روابط (۱۸) و (۱۹) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{z\left(L_a^{\lambda} f(z)\right)'+\gamma z^2\left(L_a^{\lambda} f(z)\right)''}{(1-\gamma)L_a^{\lambda} f(z)+\gamma z\left(L_a^{\lambda} f(z)\right)'} = \beta+(1-\beta)p(z), \qquad (۲۲)$$

$$\frac{w\left(L_a^{\lambda} g(w)\right)'+\gamma w^2\left(L_a^{\lambda} g(w)\right)''}{(1-\gamma)L_a^{\lambda} g(w)+\gamma w\left(L_a^{\lambda} g(w)\right)'} = \beta+(1-\beta)q(w), \qquad (۲۳)$$

که در آن توابع $p(z)$ و $q(w)$ به‌ترتیب به فرم (۹) و (۱۰) می‌باشند. با مساوی قرار دادن ضرایب روابط (۲۲) و (۲۳) داریم:

$$(\gamma+1)\left(\frac{a}{a+1}\right)^{\lambda} a_2=(1-\beta)p_1, \qquad (۲۴)$$

$$2(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda} a_3-(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda} a_2^2 =(1-\beta)p_2, \qquad (۲۵)$$

$$-(\gamma+1)\left(\frac{a}{a+1}\right)^{\lambda} a_2=(1-\beta)q_1, \qquad (۲۶)$$

$$2(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}(2a_2^2-a_3) -(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda} a_2^2=(1-\beta)q_2. \qquad (۲۷)$$

از روابط (۲۴) و (۲۶) نتیجه می‌شود:

$$p_1=-q_1. \qquad (۲۸)$$

هم‌چنین از (۲۵)، (۲۷) و (۲۸) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$2(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda} a_2^2=(1-\beta)^2(p_1^2+q_1^2), \qquad (۲۹)$$

$$4(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda} a_2^2-2(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda} a_2^2 =(1-\beta)(p_2+q_2).$$

بنابراین

$$a_2^2=\frac{(1-\beta)(p_2+q_2)}{2\left(2(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}-(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}\right)}.$$

حال با به کار بردن لم ۲، رابطه (۲۰) حاصل می‌شود.

از روابط (۲۵) و (۲۷) داریم:

$$4(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}(a_3-a_2^2)=(1-\beta)(p_2-q_2),$$

لذا از رابطه (۲۹) به‌دست می‌آوریم:

$$a_3=\frac{(1-\beta)(p_2-q_2)}{4(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}}+a_2^2 =\frac{(1-\beta)(p_2-q_2)}{4(2\gamma+1)\left(\frac{a}{a+2}\right)^{\lambda}}+\frac{(1-\beta)^2(p_1^2+q_1^2)}{2(\gamma+1)^2\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2\lambda}}.$$

حال با بکارگیری دوباره‌ی

لم ۱، رابطه (۲۱) حاصل می‌شود و این حکم را اثبات می‌کند. □

References

[1] Y. Komatu, On analytic prolongation of a family of operators, Mathematica (cluj), 32 (1990) 141-145.

[2] R.M. Ali, S.K. Lee, V. Ravichandran, S. Supramaniam, Coefficient estimates for bi-univalent Ma-Minda starlike and convex functions, Appl. Math. Lett., 25 (2012) 344-351.

[3] T.M. Flett, The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities, J. Math. Anal. Appl., 38 (1972) 746-765.

[4] G.S. Salagean, Subclasses of univalent functions, in: Complex Analysis-Fifth Romanian-Finnish Seminar, Springer, 1983, pp. 362-372.

[5] B.A. Uralegaddi, C. Somanatha, Certain classes of univalent functions, in: Current topics in analytic function theory, World Scientific, 1992, pp. 371-374.

[6] I.B. Jung, Y.C. Kim, H.M. Srivastava, The Hardy space of analytic functions associated with certain one-parameter families of integral operators, J. Math. Anal. Appl., 176 (1993) 138-147.

[7] M. Lewin, On a coefficient problem for bi-univalent functions, Proc. Am. Math. Soc., 18 (1967) 63-68.

[8] D.A. Brannan, J.G. Clunie, Aspects of Contemporary Complex Analysis (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham; July 1–20, 1979), in, Academic Press, New York and London, 1980.

[9] E. Netanyahu, The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z|<1$, Archive Rational Mech. Anal., 32 (1969) 100-112.

[10] D.A. Brannan, T.S. Taha, On some classes of bi-univalent functions, in: Math. Anal. Appl., Elsevier, 1988, pp. 53-60.

[11] B.A. Frasin, M.K. Aouf, New subclasses of bi-univalent functions, Appl. Math. Lett., 24 (2011) 1569-1573.

[12] Q.-H. Xu, Y.-C. Gui, H.M. Srivastava, Coefficient estimates for a certain subclass of analytic and bi-univalent functions, Appl. Math. Lett., 25 (2012) 990-994.