

قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های (α, ψ, p) -انقباضی در فضاهای متریک احتمال منجر مجهز به Γ -فاصله

حمید شایان‌پور^۱، پیمان احمدی^۲، آسیه نعمتی‌زاده^{۳*}

۱. دانشیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد

۲. پژوهشگر، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد

۳. دانشجوی دکتری، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۸/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۲۲

Some fixed point theorems of (α, ψ, p) -contractive mappings in Menger probabilistic metric spaces with r -distance

Hamid Shayanpour¹, Peyman Ahmadi², Asiyeh Nematizadeh^{3,*}

1. Associate Professor, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrekord University

2. Researcher, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrekord University

3. PhD Candidate, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrekord University

Received: 11/9/2017

Accepted: 1/12/2018

Abstract: In this paper, we introduce (α, ψ, p) -contractive mapping, α -admissible mapping and r -distance in Menger probabilistic metric space. Then we prove some fixed point theorems for (α, ψ, p) -contractive mappings in complete Menger probabilistic metric space with r -distances p and to assure the uniqueness of the fixed point, we added the property (H) to assumptions of theorems.

Keywords: Menger probabilistic metric space, (α, ψ, p) -contractive mapping, α -admissible mapping, r -distance.

چکیده: در این مقاله ابتدا مفاهیم نگاشت (α, ψ, p) -انقباضی، نگاشت α -قابل قبول و Γ -فاصله را در فضای متریک احتمال منجر معرفی می‌کنیم، سپس به اثبات قضایای پیرامون وجود نقطه ثابت برای نگاشت‌های (α, ψ, p) -انقباضی در فضای متریک احتمال منجر کامل مجهز به Γ -فاصله p می‌پردازیم و نشان می‌دهیم با افزودن ویژگی (H) به این قضایا، نگاشت‌های ذکر شده دارای نقطه ثابت یکتا می‌باشند.

کلمات کلیدی: فضای متریک احتمال منجر، نگاشت (α, ψ, p) -انقباضی، نگاشت α -قابل قبول، Γ -فاصله.

۱ مقدمه می‌شود. مطالعه فضای متریک احتمال اولین بار توسط

منجر^۱ انجام شد [۱]. شویزر و اسکالر^۲ [۲] با اثبات

فضای متریک احتمال تعمیمی از فضای متریک است که

در آن به جای مقادیر نامنفی متر از توابع توزیع استفاده

¹ Menger

² Schweizer and Sklar

اثبات قضایایی پیرامون وجود نقطه ثابت برای نگاشت‌های (α, ψ, p) -انقباضی در فضای متریک احتمال منجر کامل مجهز به Γ -فاصله p می‌پردازیم و نشان می‌دهیم با افزودن ویژگی (H) به این قضایا، نگاشت‌های ذکر شده دارای نقطه ثابت یکتا می‌باشند. ابتدا بعضی از تعاریف و نتایج اصلی در فضاها متریک احتمال که در این مقاله به کار می‌بریم را یادآوری می‌کنیم. خواننده می‌تواند برای اطلاعات کلی‌تر به مرجع [۲] مراجعه کند. همچنین در این مقاله قرار داد می‌کنیم که $0 \times \infty = 0$.

تعریف ۱. تابع حقیقی F از اعداد حقیقی تعمیم‌یافته $[-\infty, +\infty]$ به بازه بسته $[0, 1]$ را یک تابع توزیع می‌نامیم هرگاه F صعودی و پیوسته چپ روی $(-\infty, +\infty)$ باشد، $F(\infty) = 1$ و $F(-\infty) = 0$. مجموعه همه توابع توزیع را با Γ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲. تابع توزیع F را یک تابع توزیع فاصله می‌نامیم هرگاه $F(0) = 0$. مجموعه همه توابع توزیع فاصله را با Γ^+ نشان می‌دهیم و

$$D^+ = \{F \in \Gamma^+ \mid \sup(F) = 1\}$$

چون برای هر $F \in \Gamma^+$ داریم $F[-\infty, 0] = 0$ ، بنابراین در این مقاله $F \in \Gamma^+$ را از بازه $[0, +\infty]$ به $[0, 1]$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۳. برای هر $a \in [-\infty, +\infty)$ تابع توزیع دیراک ε_a را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon_a(x) = \begin{cases} 0 & -\infty \leq x \leq a, \\ 1 & a < x \leq \infty. \end{cases}$$

برخی از نتایج اساسی در این زمینه مفهوم فضای متریک احتمال را غنی‌تر کردند. اولین نتیجه نظریه نقطه ثابت در فضای متریک احتمال توسط سگال و باروچا-رید^۱ [۳] ارائه شده که در آن مفهوم B -انقباض احتمال معرفی و تعمیمی از اصل انقباضی باناخ کلاسیک برای فضای متریک احتمال منجر کامل بیان گردیده است. در [۳] ثابت شده است که هر B -انقباض احتمال در فضای متریک احتمال منجر کامل (X, F, Δ_m) دارای نقطه ثابت یکتاست. هادزیک^۲ نتایج به دست آمده در [۳] را برای کلاس کلی‌تر از t -نرم‌ها موسوم به t -نرم از نوع H توسعه داد [۴]. پس از آن انواع مختلفی از نگاشت‌های انقباضی توسط بسیاری از نویسندگان معرفی و قضایای نقطه ثابت متناظر با آنها بیان و اثبات شد [۵، ۶]. در ادامه چودری و داس^۳ [۷] با معرفی ایده تابع تغییر فاصله، نتیجه نقطه ثابت متریک کلاسیک خان^۴ و همکارانش [۸] را به فضای متریک احتمال توسعه دادند. اخیراً باباسف^۵ [۹] نتایج چادوری و داس را برای انقباض‌های غیرخطی تعمیم یافته توسعه داده‌اند. در سال ۲۰۱۴، سو و ژانگ^۶ [۱۰] قضایایی را درباره بهترین نقطه نزدیکی در فضاها متریک احتمال اثبات کردند. برای مطالعه بیشتر در این زمینه می‌توان به منابع [۱۱-۱۴] مراجعه کرد.

در این مقاله ابتدا مفاهیم نگاشت (α, ψ, p) -انقباضی، نگاشت α -قابل قبول و Γ -فاصله را در فضای متریک احتمال منجر معرفی می‌کنیم، سپس به

¹ Sehgal and Bharucha-Reid

² Hadzic

³ Choudhury and Das

⁴ Khan

⁵ Babacev

⁶ Su and Zhang

تعریف ۸. فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر باشد، در این صورت دنباله (x_n) از عناصر X را همگرا به $x \in X$ گوئیم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $0 < \lambda < 1$ ، یک $M(\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geq M(\varepsilon, \lambda)$ ،

$$F_{x_n, x}(\varepsilon) > 1 - \lambda$$

تعریف ۹. فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر باشد، در این صورت دنباله (x_n) از عناصر X را کوشی گوئیم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $0 < \lambda < 1$ ، یک $M(\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geq M(\varepsilon, \lambda)$ و برای هر $r \in \mathbb{N}$

$$F_{x_n, x_{n+r}}(\varepsilon) > 1 - \lambda$$

تعریف ۱۰. فضای متریک احتمال منجر (X, F, Δ) را کامل گوئیم هرگاه هر دنباله کوشی در X همگرا به نقطه‌ای در X باشد.

مثال ۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد و برای هر $x, y \in X$ و هر $t \geq 0$ نگاشت $F: X \times X \rightarrow \Gamma^+$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$F_{x,y}(t) = \varepsilon \cdot (t - d(x, y)),$$

در این صورت (X, F, Δ_m) یک فضای متریک احتمال منجر است.

لم ۱. ([۱۵]) فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر باشد، در این صورت F برای هر $t > 0$ ثابت، نیم پیوسته پایینی است. به عبارت دیگر، اگر $t > 0$ ، (x_n) و (y_n) دنباله‌هایی در X باشند به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ،

تعریف ۴. فرض کنیم X مجموعه‌ی ناتهی، F تابعی از $X \times X$ بتوی Γ^+ باشد. برای هر p و q متعلق به $X \times X$ ، $F(p, q)$ را با $F_{p,q}$ نشان می‌دهیم. زوج مرتب (X, F) را فضای متریک احتمال گوئیم هرگاه برای هر $p, q, r \in X$ شرایط زیر برقرار باشند:

$$F_{p,q} = F_{q,p} \text{ (الف)}$$

(ب) برای هر $x > 0$ ، $F_{p,q}(x) = 1$ اگر و تنها اگر $p = q$ ، یا به عبارت دیگر $p = q \Leftrightarrow F_{p,q} = \varepsilon$.

(پ) برای هر $p, q, r \in X$ و هر $x, y \geq 0$ ، اگر $F_{p,r}(x+y) = 1$ ، $F_{q,r}(y) = 1$ و $F_{p,q}(x) = 1$

تعریف ۵. نگاشت $\Delta: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ را t -نرم گوئیم، هرگاه شرکت‌پذیر، جابجایی و روی هر مؤلفه نانزولی، همچنین ۱ عنصر همانی Δ باشد. نگاشت‌های $\Delta_p(a, b) = ab$ و $\Delta_m(a, b) = \min\{a, b\}$ مثال‌هایی از t -نرم پیوسته می‌باشند. با توجه به ترتیب نقطه‌ای برای هر t -نرم Δ ، داریم $\Delta \leq \Delta_m$.

تعریف ۶. سه‌تایی (X, F, Δ) را فضای متریک احتمال منجر گوئیم هرگاه (X, F) یک فضای متریک احتمال و Δ یک t -نرم باشد به طوری که برای هر $p, q, r \in X$ و هر $x, y \geq 0$ داشته باشیم:

$$F_{p,r}(x+y) \geq \Delta(F_{p,q}(x), F_{q,r}(y)).$$

تعریف ۷. (ε, λ) -توپولوژی در فضای متریک احتمال منجر (X, F, Δ) توسط خانواده‌ای از همسایگی‌های نقاط $x \in X$

$$N_x = \{N_x(\varepsilon, \lambda) : \varepsilon > 0, \lambda \in (0, 1)\}$$

معرفی می‌شود که

$$N_x(\varepsilon, \lambda) = \{y \in X \mid F_{x,y}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}.$$

آنگاه

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_{x_n, y_n}(t) = F_{x, y}(t).$$

تعریف ۱۱. نگاشت $\Psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ را یک $\Psi -$ تابع گوئیم هرگاه Ψ دوسویی باشد، $\Psi(0) = 0$ و برای هر $t > 0$ داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^{-n}(t) = \infty$.

تعریف ۱۲. فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر و $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت باشد. در این صورت f را یک نگاشت (α, Ψ) -انقباضی گوئیم هرگاه دو تابع $\alpha: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ و $\Psi \in \Psi$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $x, y \in X$ و $t > 0$ داشته باشیم:

$$\alpha(x, y, t) F_{f_x, f_y}(\Psi(t)) \geq F_{x, y}(t).$$

تعریف ۱۳. فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر باشد. نگاشت‌های $\alpha: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ و $f: X \rightarrow X$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت f را یک نگاشت α -قابل قبول گوئیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ داشته باشیم:

$$\alpha(x, y, t) \leq 1 \Rightarrow \alpha(fx, fy, t) \leq 1.$$

مثال ۲. فرض کنیم $X = [1, \infty)$ و $f: X \rightarrow X$ نگاشتی باشد که به صورت $f(x) = \sqrt{x}$ تعریف شده باشد. همچنین نگاشت $\alpha: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\alpha(x, y, t) = \begin{cases} e^{x-y} & x \geq y, \\ 0 & x < y. \end{cases}$$

در این صورت f یک نگاشت α -قابل قبول است.

تعریف ۱۴. فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر باشد. نگاشت $p: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ را یک r -فاصله روی X گوئیم هرگاه p در شرایط زیر صدق کند: (p_1) برای هر $x, y, z \in X$ و هر $t, s \geq 0$ داشته باشیم $p_{x, z}(t+s) \geq \Delta(p_{x, y}(t), p_{y, z}(s))$. (p_2) نسبت به متغیر دوم نیم‌پیوسته پایینی باشد، یعنی اگر $x \in X$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ، آنگاه برای هر $t \geq 0$ داشته باشیم:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} p_{x, y_n}(t) = p_{x, y}(t).$$

(p_3) برای هر $\varepsilon \in (0, 1)$ یک $\delta \in (0, 1)$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $p_{z, x}(t) \geq 1 - \delta$ و $p_{z, y}(s) \geq 1 - \delta$ ، آنگاه $F_{x, y}(t+s) \geq 1 - \varepsilon$. همچنین قرارداد می‌کنیم که $p(\infty) = 1$.

مثال ۳. فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر باشد، در این صورت $p = F$ یک r -فاصله روی X است.

تعریف ۱۵. فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر با r -فاصله p ، $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت باشد و $\Psi \in \Psi$ به طوری که برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ داشته باشیم:

$$p_{f_x, f_y}(\Psi(t)) \geq p_{x, y}(t),$$

در این صورت f را یک نگاشت (Ψ, p) -انقباضی گوئیم. اگر $p = F$ ، آنگاه f را یک نگاشت Ψ -انقباضی می‌نامیم.

لم ۲. فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر و p یک r -فاصله روی X باشد.

لذا $F_{x_n, x_{n+r}}(t+s) \geq 1 - \varepsilon$ در نتیجه (x_n) یک دنباله کوشی است. \square

۲ نگاشت‌های (α, ψ, p) -انقباضی

تعریف ۱۶. فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر با Γ -فاصله p و $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت باشد. در این صورت f را یک نگاشت (α, ψ, p) -انقباضی گوئیم هرگاه دو تابع $\alpha: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ و $\psi \in \Psi$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ داشته باشیم:

$$\alpha(x, y, t) p_{fx, fy}(\psi(t)) \geq p_{x, y}(t). \quad (1)$$

تذکره ۱. اگر در رابطه (۱) قرار دهیم $p = F$ ، آنگاه نگاشت (α, ψ, p) -انقباضی به یک نگاشت (α, ψ) -انقباضی تبدیل می‌شود.

قضیه ۱. فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر کامل باشد به طوری که Δ یک t -نرم پیوسته است، p یک Γ -فاصله روی X و $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت (α, ψ, p) -انقباضی باشد.

همچنین فرض کنیم شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) f یک نگاشت α -قابل قبول باشد،

(ب) نقطه $x_0 \in X$ موجود باشد به طوری که برای هر

$$\alpha(x_0, fx_0, t) \leq 1, \quad t > 0.$$

(پ) یا f پیوسته باشد یا برای هر دنباله (x_n) در X

که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha(x_n, x_{n+1}, t) \leq 1 \quad \text{در این صورت برای هر } n \in \mathbb{N}$$

داشته باشیم:

همچنین فرض کنیم (x_n) و (y_n) دنباله‌هایی در X و (α_n) و (β_n) دنباله‌هایی همگرا به یک در $[0, 1]$ باشند. در این صورت برای هر $x, y, z \in X$ داریم:

(الف) اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $t, s > 0$ داشته باشیم $p_{x_n, y}(t) \geq \alpha_n$ و $p_{x_n, z}(s) \geq \beta_n$ ، آنگاه $z = y$ به ویژه اگر $p_{x, y}(t) = 1 = p_{x, z}(s)$ ، آنگاه $z = y$.

(ب) اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $t, s > 0$ داشته باشیم $p_{x_n, y_n}(t) \geq \alpha_n$ و $p_{x_n, y_n}(s) \geq \beta_n$ ، آنگاه دنباله (y_n) همگرا به y است.

(پ) اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، هر $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و هر $t > 0$ داشته باشیم $p_{x_n, x_{n+r}}(t) \geq \alpha_n$ ، آنگاه (x_n) یک دنباله کوشی است.

برهان. (ب) فرض کنیم $\varepsilon \in (0, 1)$. چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ پس $n_1 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \geq n_1$ ، $\alpha_n > 1 - \delta$ و $\beta_n > 1 - \delta$ بنابراین

$$p_{x_n, y_n}(t) \geq \alpha_n > 1 - \delta, \quad (\forall t > 0),$$

$$p_{x_n, y}(s) \geq \beta_n > 1 - \delta, \quad (\forall s > 0),$$

لذا طبق تعریف Γ -فاصله نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{y_n, y}(t+s) \geq 1 - \varepsilon.$$

(الف) با قرار دادن $(y_n = z)$ در قسمت (ب) نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

(پ) فرض کنیم $\varepsilon \in (0, 1)$. چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$

پس $n_1 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \geq n_1$

$$\alpha_n > 1 - \delta$$

$$p_{x_n, x_n}(t) \geq \alpha_n > 1 - \delta, \quad (\forall t > 0),$$

$$p_{x_n, x_{n+r}}(s) \geq \alpha_n > 1 - \delta, \quad (\forall s > 0),$$

حال نشان می‌دهیم (x_n) یک دنباله کوشی است.

فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ، در این صورت

با r بار استفاده از نامساوی مثلث نتیجه می‌گیریم:

$$p_{x_n, x_{n+r}}(t) \geq \Delta \left(p_{x_n, x_{n+1}} \left(\frac{t}{r} \right), p_{x_{n+1}, x_{n+2}} \left(\frac{t}{r} \right), \dots, p_{x_{n+r-1}, x_{n+r}} \left(\frac{t}{r} \right) \right),$$

با حدگیری از طرفین رابطه فوق و طبق (۵) داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{x_n, x_{n+r}}(t) = 1, \quad (6)$$

لذا با توجه به قسمت سوم لم ۲، (x_n) یک دنباله

کوشی در فضای کامل (X, F, Δ) است. بنابراین نقطه

$u \in X$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$

ادعا می‌کنیم که u نقطه ثابت f می‌باشد. اگر f

پیوسته باشد، آنگاه داریم:

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f x_n = f u,$$

لذا u یک نقطه ثابت از f می‌باشد. در غیر این صورت

با استفاده از قسمت دوم فرض (پ) قضیه و رابطه (۲)

برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $t > 0$ خواهیم داشت:

$$\alpha(x_n, u, t) \leq 1. \quad (7)$$

چون p یک Γ -فاصله است، از شرط (p_2) برای هر

$n \in \mathbb{N}$ و $t > 0$ نتیجه می‌گیریم که:

$$p_{x_n, u}(t) = \liminf_{m \rightarrow \infty} p_{x_n, x_m}(t) := \alpha_n.$$

از طرفی از رابطه (۶) داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$ ،

بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{x_n, u}(t) = 1, \quad (\forall t > 0). \quad (8)$$

از رابطه‌های (۱) و (۷) برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $t > 0$

داریم:

$$\begin{aligned} p_{x_n, f u}(t) &= p_{f x_{n-1}, f u}(t) \\ &\geq \alpha(x_n, u, t) p_{f x_{n-1}, f u}(t) \\ &\geq p_{x_{n-1}, u}(\psi^{-1}(t)), \end{aligned}$$

$$\alpha(x_n, x, t) \leq 1$$

در این صورت یک نقطه $u \in X$ وجود دارد به طوری که

$f u = u$. علاوه بر این اگر $\alpha(u, u, t) \leq 1$ آنگاه

$$p_{u, u}(t) = 1$$

برهان. با توجه به قسمت (ب)، نقطه $x_i \in X$ وجود

دارد به طوری که برای هر $t > 0$ ، $\alpha(x_i, f x_i, t) \leq 1$.

دنباله (x_n) در X را برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

به صورت $x_{n+1} = f x_n = f^{n+1} x_0$ در نظر می‌گیریم. اگر

برای یک $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ داشته باشیم $x_{n+1} = x_n$ ،

آنگاه $x_n = x_{n+1} = f x_n$ لذا $u = x_n$ یک نقطه

ثابت از f می‌باشد و اثبات تمام می‌شود. بنابراین فرض

می‌کنیم برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ، $x_{n+1} \neq x_n$. چون f

یک نگاشت α -قابل قبول است، داریم:

$$\alpha(x_i, x_j, t) = \alpha(x_i, f x_j, t) \leq 1$$

$$\Rightarrow \alpha(f x_i, f x_j, t) = \alpha(x_i, x_j, t) \leq 1,$$

با ادامه این روند برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $t > 0$ نتیجه

می‌گیریم:

$$\alpha(x_n, x_{n+1}, t) \leq 1. \quad (2)$$

حال نشان می‌دهیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{x_n, x_{n+1}}(t) = 1$ با

استفاده از روابط (۱) و (۲) برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $t > 0$

داریم:

$$\begin{aligned} p_{x_n, x_{n+1}}(t) &= p_{f x_{n-1}, f x_n}(t) \\ &\geq \alpha(x_{n-1}, x_n, t) p_{f x_{n-1}, f x_n}(t) \quad (3) \\ &\geq p_{x_{n-1}, x_n}(\psi^{-1}(t)). \end{aligned}$$

با تکرار این روند برای هر $n \in \mathbb{N}$ به دست می‌آوریم:

$$p_{x_n, x_{n+1}}(t) \geq p_{x_0, x_1}(\psi^{-n}(t)). \quad (4)$$

با حدگیری از رابطه (۴) و با استفاده از تعریف تابع ψ

نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{x_n, x_{n+1}}(t) = 1. \quad (5)$$

به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$fx = \frac{\varphi}{\delta} \ln x + 1,$$

$$\alpha(x, y, t) = \begin{cases} 1 & x \in [1, 2], \\ \infty & \text{o.}\omega. \end{cases}$$

اگر $x, y \in [1, 2]$ و $t > 0$ ، آنگاه طبق تعریف α ، $\alpha(x, y, t) = 1$ از طرفی داریم:

$$p_{fx, fy}(\psi(t)) = \frac{\frac{\varphi}{\delta} t}{\frac{\varphi}{\delta} t + \left| \frac{\varphi}{\delta} \ln x + 1 - \frac{\varphi}{\delta} \ln y - 1 \right|}$$

$$= \frac{t}{t + |\ln x - \ln y|}$$

$$\geq \frac{t}{t + |x - y|}$$

$$= p_{x, y}(t),$$

بنابراین

$$\alpha(x, y, t) p_{fx, fy}(\psi(t)) \geq p_{x, y}(t).$$

اگر $x \notin [1, 2]$ یا $y \notin [1, 2]$ و $t > 0$ ، آنگاه طبق تعریف α ، $\alpha(x, y, t) = \infty$ و بنابراین رابطه

$$\alpha(x, y, t) p_{fx, fy}(\psi(t)) \geq p_{x, y}(t)$$

برقرار است. لذا f یک نگاشت (α, ψ, p) -انقباضی است. حال نشان می‌دهیم f یک نگاشت α -قابل قبول است. فرض کنیم $x, y \in X$ و $t > 0$ به طوری که $\alpha(x, y, t) \leq 1$ ، لذا طبق تعریف α ، $x, y \in [1, 2]$ و با توجه به تعریف f داریم:

$$fx = \frac{\varphi}{\delta} \ln x + 1 \in [1, 2],$$

$$fy = \frac{\varphi}{\delta} \ln y + 1 \in [1, 2],$$

در نتیجه $\alpha(fx, fy, t) \leq 1$ پس f یک نگاشت α -قابل قبول است. علاوه بر این برای هر

با حدگیری از طرفین رابطه اخیر و استفاده رابطه (۸) داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{x_n, fu}(t) = 1. \quad (۹)$$

لذا با استفاده از قسمت اول لم ۲ و روابط (۸) و (۹) نتیجه می‌گیریم $fu = u$. سرانجام فرض می‌کنیم $\alpha(u, u, t) \leq 1$ نشان می‌دهیم $p_{u, u}(t) = 1$. (فرض خلف) فرض می‌کنیم $t > 0$ وجود داشته باشد که $p_{u, u}(t) < 1$ ، در این صورت با استفاده از شرط انقباضی (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$p_{u, u}(t) \geq \alpha(u, u, t) p_{fu, fu}(t)$$

$$\geq p_{u, u}(\psi^{-1}(t)).$$

با $n \in \mathbb{N}$ و $t > 0$ بار تکرار این روند برای هر n داریم:

$$p_{u, u}(t) \geq p_{u, u}(\psi^{-n}(t)),$$

با حدگیری از طرفین رابطه اخیر و استفاده از تعریف ψ نتیجه می‌گیریم $p_{u, u}(t) \geq 1$ که این با فرض $p_{u, u}(t) < 1$ در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و برای هر $t > 0$ داریم $p_{u, u}(t) = 1$. \square

مثال ۴. فرض کنیم $X = [1, \infty)$ و برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ نگاشت $F: X \times X \rightarrow \Gamma^+$ به صورت

$$F_{x, y}(t) = \frac{t}{t + |x - y|}$$

تعریف شده باشد. در این صورت (X, F, Δ_m) یک فضای متریک احتمال منجر کامل است. فرض کنیم p یک Γ -فاصله روی X باشد که به صورت $p_{x, y} = F_{x, y}$ تعریف شده است و برای هر $t \in [0, \infty)$ ، $\psi(t) = \frac{4}{5}t$ ، $\alpha: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ و $f: X \rightarrow X$

که یک تناقض است. بنابراین $u = fu$. بخش دوم برهان مانند برهان قضیه ۱ است که به منظور جلوگیری از تکرار حذف شده است. \square

تعریف ۱۷. فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر و $\alpha: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ یک نگاشت باشد. گوئیم X دارای ویژگی (H) است هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ ، یک $z \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $\alpha(z, x, t) \leq 1$ و $\alpha(z, y, t) \leq 1$.

قضیه ۳. با افزودن ویژگی (H) به فرضیات قضیه ۱، نگاشت f دارای نقطه ثابت یکتا می‌باشد.

برهان. فرض کنیم u و v نقاط ثابت f باشند. طبق شرط (H) یک w در X وجود دارد که

$$\alpha(w, u, t) \leq 1, \quad \alpha(w, v, t) \leq 1. \quad (10)$$

طبق α -قابل قبول بودن f و رابطه (۱۰) داریم:

$$\alpha(w, u, t) \leq 1 \Rightarrow \alpha(fw, fu, t) \leq 1,$$

لذا

$$\alpha(f^n w, u, t) = \alpha(f(f^{n-1} w), fu, t) \leq 1.$$

با ادامه این روند مشاهده می‌کنیم که $\alpha(f^n w, u, t) \leq 1$ و همچنین به‌طور مشابه برای نقطه v داریم $\alpha(f^n w, v, t) \leq 1$ و چون f یک نگاشت (α, ψ, p) -انقباضی است، پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $t > 0$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} p_{f^{n+1}w, u}(t) &= p_{f(f^n w), fu}(t) \\ &\geq \alpha(f^n w, u, t) p_{f(f^n w), fu}(t) \\ &\geq p_{f^n w, u}(\psi^{-1}(t)). \end{aligned}$$

با ادامه این روند داریم:

$$p_{f^{n+1}w, u}(t) \geq p_{f^n w, u}(\psi^{-n}(t)),$$

$x \in [1, 2]$ داریم $fx \in [1, 2]$ که طبق تعریف α نتیجه می‌شود $\alpha(x, fx, t) \leq 1$. بنابراین همه فرضیات قضیه قبل برقرار است و $x = 1$ نقطه ثابت f می‌باشد.

قضیه ۲. فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر کامل باشد به طوری که Δ یک t -نرم پیوسته است، p یک Γ -فاصله روی X و $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت (α, ψ, p) -انقباضی باشد. همچنین فرض کنیم شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) f یک نگاشت α -قابل قبول باشد،

(ب) نقطه $x \in X$ موجود باشد به طوری که برای هر $t > 0$ ، $\alpha(x, fx, t) \leq 1$.

(پ) برای هر $y \in X$ و هر $t > 0$ که $y \neq fy$ داشته باشیم:

$$\sup \{ \Delta(p_{x,y}(t), p_{x,fx}(t)) : x \in X \} < 1.$$

در این صورت یک نقطه $u \in X$ وجود دارد به طوری که $fu = u$. علاوه بر این اگر $\alpha(u, u, t) \leq 1$ آنگاه $p_{u,u}(t) = 1$.

برهان. همانند برهان قضیه ۱، می‌توانیم نشان دهیم که (x_n) یک دنباله کوشی در فضای متریک احتمال منجر کامل (X, F, Δ) است، پس $u \in X$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$. حال نشان می‌دهیم u نقطه ثابت f می‌باشد. (فرض خلف) فرض کنیم $u \neq fu$ ، در این صورت با توجه به شرط (پ) و رابطه‌های (۵) و (۸) قضیه قبل داریم:

$$\begin{aligned} 1 &> \sup \{ \Delta(p_{x_n, u}(t), p_{x_n, fx_n}(t)) : x \in X \} \\ &= \sup \{ \Delta(p_{x_n, u}(t), p_{x_n, x_{n+1}}(t)) : n \in \mathbb{N} \} \\ &= 1, \end{aligned}$$

برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ ، یک $k \in [0, 1)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$p_{fx, fy}(kt) \geq p_{x, y}(t),$$

در این صورت یک نقطه $u \in X$ یکتا وجود دارد به طوری که $fu = u$. علاوه بر این $p_{u, u}(t) = 1$.

نتیجه ۳. فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر کامل باشد به طوری که Δ یک t -نرم پیوسته است. همچنین فرض کنیم $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ ، یک $k \in [0, 1)$ وجود داشته باشد که

$$F_{fx, fy}(kt) \geq F_{x, y}(t),$$

در این صورت f یک نقطه ثابت یکتا در X دارد.

تعریف ۱۸. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. در این صورت (X, F, Δ, \leq) را یک فضای متریک احتمال منجر مرتب جزئی می‌نامیم هرگاه (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر و (X, \leq) یک مجموعه مرتب جزئی باشد.

نتیجه ۴. فرض کنیم (X, F, Δ, \leq) یک فضای متریک احتمال منجر مرتب جزئی کامل باشد به طوری که Δ یک t -نرم پیوسته است، p یک t -فاصله روی X و $f: X \rightarrow X$ نگاشتی (ψ, p) -انقباضی پیوسته و نازولی نسبت به \leq باشد. همچنین فرض کنیم

$x \in X$ موجود باشد به طوری که $x \leq fx$. در

این صورت یک نقطه $u \in X$ وجود دارد به طوری که $fu = u$. علاوه بر این $p_{u, u}(t) = 1$.

برهان. نگاشت $\alpha: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

به طور مشابه برای هر $n \in \mathbb{N}$ به دست می‌آوریم:

$$p_{f^{n+1}w, v}(t) \geq p_{f, w, v}(\psi^{-n}(t)),$$

با حدگیری از طرفین دو رابطه اخیر و ویژگی تابع ψ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{f^{n+1}w, v}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{f, w, v}(t) = 1,$$

با استفاده از قسمت اول لم ۲ نتیجه می‌گیریم که $u = v$. \square

قضیه ۴. فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر کامل باشد به طوری که Δ یک t -نرم پیوسته است، p یک t -فاصله روی X و $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت (ψ, p) -انقباضی باشد. در این صورت یک نقطه $u \in X$ یکتا وجود دارد به طوری که $fu = u$. علاوه بر این $p_{u, u}(t) = 1$.

برهان. با قرار دادن $\alpha(x, y, t) = 1$ در قضیه قبل نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. \square

با قرار دادن $p = F$ در

قضیه ۴، نتیجه زیر را به دست می‌آوریم.

نتیجه ۱. فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر کامل باشد به طوری که Δ یک t -نرم پیوسته است. همچنین فرض کنیم $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت ψ -انقباضی باشد. در این صورت f یک نقطه ثابت یکتا در X دارد.

نتیجه ۲. فرض کنیم (X, F, Δ) یک فضای متریک احتمال منجر کامل باشد به طوری که Δ یک t -نرم پیوسته است، p یک t -فاصله روی X و $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت باشد. همچنین فرض کنیم

برهان. نگاشت $\alpha: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(x, y, t) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in (A_1 \times A_r) \cup (A_r \times A_1), \\ \infty & \text{o.w.} \end{cases}$$

برای هر $(x, y) \in (A_1 \times A_r) \cup (A_r \times A_1)$ داریم $\alpha(x, y, t) = 1$ لذا برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ نتیجه می‌گیریم:

$$\alpha(x, y, t) p_{f_x, f_y}(\psi(t)) \geq p_{x, y}(t),$$

بنابراین f یک نگاشت (α, ψ, p) -انقباضی است. از طرفی با استفاده از قسمت (الف) و با توجه به تعریف α به وضوح f یک نگاشت α -قابل قبول است. حال فرض کنیم (x_n) دنباله‌ای در X باشد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $x \in X, t > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ و $\alpha(x_n, x_{n+1}, t) \leq 1$ با استفاده از تعریف α و قسمت (الف) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $(x_{r_{k-1}}, x_{r_k}) \in A_1 \times A_r$ یا $(x_{r_k-1}, x_{r_k}) \in A_r \times A_1$. چون $(x_{r_{k-1}})$ و (x_{r_k}) زیردنباله‌هایی از دنباله همگرای (x_n) هستند و A_1 و A_r زیرمجموعه‌های بسته از X می‌باشند، پس $x \in A_1 \cap A_r$ که طبق تعریف α یعنی $\alpha(x_n, x, t) \leq 1$. بنابراین تمام فرضیات قضیه ۱ برقرار است و در نتیجه f یک نقطه ثابت مانند $u \in X$ دارد. چون $X = A_1 \cup A_r$ و با استفاده از شرط (الف) نتیجه می‌گیریم که $u \in A_1 \cap A_r$ و با استفاده از تعریف α ، $\alpha(u, u, t) = 1$ و در نتیجه $p_{u, u}(t) = 1$. \square

$$\alpha(x, y, t) = \begin{cases} 1 & x \leq y, \\ \infty & \text{o.w.} \end{cases}$$

برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ که $x \leq y$ ، طبق تعریف α داریم $\alpha(x, y, t) = 1$ لذا

$$\alpha(x, y, t) p_{f_x, f_y}(\psi(t)) \geq p_{x, y}(t),$$

در غیر این صورت $\alpha(x, y, t) = \infty$ پس

$$\alpha(x, y, t) p_{f_x, f_y}(\psi(t)) \geq p_{x, y}(t)$$

بنابراین f یک نگاشت (α, ψ, p) -انقباضی است. چون f نازولی است، با توجه به تعریف α به وضوح f یک نگاشت α -قابل قبول است. از طرفی طبق فرض $x \in X$ موجود است به طوری که $x \leq fx$ که این یعنی $\alpha(x, fx, t) \leq 1$. بنابراین تمام فرضیات قضیه ۱ برقرار است، در نتیجه f یک نقطه ثابت مانند $u \in X$ دارد به طوری که $p_{u, u}(t) = 1$. \square

نتیجه ۵. فرض کنیم A_1 و A_r زیرمجموعه‌های بسته و ناتهی از فضای متریک احتمال منجر کامل (X, F, Δ) مجهز به Γ -فاصله p باشند به طوری که $X = A_1 \cup A_r$ و f یک خودنگاشت روی X باشد. همچنین فرض کنیم شرایط زیر برقرار باشند:

$$(الف) \quad f(A_r) \subseteq A_1 \text{ و } f(A_1) \subseteq A_r$$

(ب) یک $\psi \in \Psi$ وجود داشته باشد به طوری که برای

$$\text{هر } (x, y) \in (A_1 \times A_r) \cup (A_r \times A_1),$$

$$p_{f_x, f_y}(\psi(t)) \geq p_{x, y}(t),$$

در این صورت f یک نقطه ثابت مانند $u \in A_1 \cap A_r$

$$\text{دارد. علاوه بر این } p_{u, u}(t) = 1.$$

References

[1] K. Menger, Statistical metrics, Proc. Nat. Acad. Sci., 28 (1942) 535-537.

- [2] B. Schweizer, A. Sklar, Probabilistic metric spaces, in: North Holland Series in Probability and Applied Mathematics, Oxford, 1983 and the new edition in Dover Books on Mathematics, Dover, New York, Amsterdam, 2005.
- [3] V. Sehgal, A.T. Bharucha-Reid, Fixed points of contraction mappings on probabilistic metric spaces, *Theory Comput. Syst.*, 6 (1972) 97-102.
- [4] O. Hadzic, Some theorems on the fixed points in probabilistic metric and random normed spaces, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 13 (1981) 18.
- [5] I. Golet, On contractions in probabilistic metric spaces, *Radovi Math.*, 13 (2004) 87-92.
- [6] D. Mihet, A class of Sehgal's contractions in probabilistic metric spaces, *An. Univ. Vest. Timisoara Ser. Mat. Inf.*, 37 (1999) 105-110.
- [7] B.S. Choudhury, K. Das, A new contraction principle in Menger spaces, *Acta Math. Sinica, English Series*, 24 (2008) 1379.
- [8] M.S. Khan, M. Swaleh, S. Sessa, Fixed point theorems by altering distances between the points, *Bull. Aust. Math. Soci.*, 30 (1984) 1-9.
- [9] N.A. Babačev, Nonlinear generalized contractions on Menger PM spaces, *Appl. Anal. Discrete Math.*, (2012) 257-264.
- [10] Y. Su, J. Zhang, Fixed point and best proximity point theorems for contractions in new class of probabilistic metric spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, 2014 (2014).
- [11] A.N.A. Abdou, Y.J. Cho, R. Saadati, Distance type and common fixed point theorems in Menger probabilistic metric type spaces, *Appl. Math. Comput.*, 265 (2015) 1145-1154.
- [12] D. Oregan, S.M. Vaezpour, J.K. KIM, Generalized distance and common fixed point theorems in Menger probabilistic metric spaces, *Bull. Iran. Math. Soc.*, 35 (2009) 97-117.
- [13] R. Saadati, Generalized distance and fixed point theorems in partially ordered probabilistic metric spaces, *Matematički vesnik*, 65 (2013) 82-93.
- [14] N. Shobkolaei, S.M. Vaezpour, S. Sedghi, Fixed Points Theorems with respect to fuzzy w-distance, *Iran. J. Fuzzy Syst.*, 11 (2014) 103-112.
- [15] S.-S. Chang, Y.J. Cho, S.-M. Kang, *Nonlinear Operator Theory in Probabilistic Metric Spaces*, Nova Publishers, 2001.