



محاسبه قوانین پایستاری معادلات ماکسول با استفاده از روش شبه خودالحاقی

مسعود سبزواری^۱، علی مهدیفر^۲، مزده محمد رحیم پناه^۲

^۱دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد

^۲گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهرکرد

چکیده: در این مقاله با استفاده از روش شبه خودالحاقی، ابداع شده توسط ابراهیموف در سال ۲۰۱۱، به محاسبه برخی قوانین پایستاری معادلات ماکسول در خلاء می‌پردازیم. باید توجه داشت که چون تعداد معادلات و مجهولات دستگاه معادلات تحت بررسی برابر نیستند، امکان یافتن لاگرانژی متناظر و استفاده مستقیم از قضیه نوتر وجود ندارد. با این حال، با حذف دو معادله از معادلات ماکسول به دستگاه معادلات تقلیل یافته‌ای می‌رسیم که در اصطلاح شبه خودالحاقی است و می‌توان با روش جدید ابراهیموف و بدون نیاز به لاگرانژی متناظر، قوانین پایستاری آن و در نتیجه تعدادی از قوانین پایستاری معادلات ماکسول را به دست آورد. لازم به ذکر است که ابراهیموف خود در سال ۲۰۰۹ برخی از قوانین پایستاری معادلات ماکسول در خلاء را با استفاده از روش خودالحاقی محاسبه کرده است، اما با توجه به این که در روش شبه خودالحاقی بر خلاف خودالحاقی امکان محاسبه لاگرانژی متناظر دستگاه تقلیل یافته و استفاده از قضیه نوتر وجود ندارد، بنابراین روش استفاده شده در این مقاله متضمن محاسبات و پیچیدگی‌های نسبتاً متفاوتی است.

کلمات کلیدی: قوانین پایستاری؛ معادلات ماکسول؛ روش شبه خودالحاقی لاگرانژی؛ حساب تغییرات.

۱. مقدمه

الکترومغناطیس شاخه‌ای از علم فیزیک است که به مطالعه پدیده‌های ناشی از نیروهای بین بارها و جریان‌های الکتریکی می‌پردازد. در این نظریه، نیروها به وسیله میدان‌های الکترومغناطیسی توصیف می‌شوند که تابعی از مکان و زمان هستند. میدان‌های الکترومغناطیسی به دو شکل الکتریکی و مغناطیسی بروز می‌کنند و این دو جنبه‌های مختلف از یک پدیده واحد هستند به گونه‌ای که هرگونه تغییر در میدان الکتریکی باعث ایجاد میدان مغناطیسی می‌شود و برعکس. شاید به جرات بتوان

^۱ نویسنده مسئول مکاتبات (رایانامه: sabzevari@math.iut.ac.ir)

تاریخ دریافت: اردیبهشت ۱۳۹۶؛ تاریخ پذیرش: تیر ۱۳۹۶

گفت که امروزه به خاطر نبوغ فیزیکدان برجسته اسکاتلندی، جیمز کلارک ماکسول (۱۸۷۹-۱۸۳۱) است که ما می‌دانیم نور نوعی انرژی الکترومغناطیس است که معمولاً تحت عنوان امواج الکترومغناطیس شناخته می‌شود. معادلات ماکسول به توصیف این ویژگی فیزیکی می‌پردازند که چگونه دو میدان الکتریکی و مغناطیسی همدیگر را تولید می‌کنند و یا با یکدیگر تعویض می‌شوند. موقعیت الکترومغناطیسی در فضای خلاء با دو میدان برداری عمود بر هم الکتریکی $E(x, t)$ و مغناطیسی $H(x, t)$ تعیین می‌شوند که در آن x متغیر (سه مولفه‌ای) مکان و t متغیر زمان است. ماکسول نشان داد که موقعیت دو میدان برداری الکتریکی و مغناطیسی مزبور در چنین شرایطی توسط دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر موسوم به معادلات ماکسول تعیین می‌شوند (در اینجا فرض بر آن است که دو میدان برداری به شکل $E(x, y, z, t) = (E^1, E^2, E^3)$ و $H(x, y, z, t) = (H^1, H^2, H^3)$ هستند):

$$\begin{cases} E_x^2 - E_y^1 + H_t^3 = 0, & H_x^2 - H_y^1 - E_t^3 = 0, \\ E_y^3 - E_z^2 + H_t^1 = 0, & H_y^3 - H_z^2 - E_t^1 = 0, \\ E_z^1 - E_x^3 + H_t^2 = 0, & H_z^1 - H_x^3 - E_t^2 = 0, \\ E_x^1 + E_y^2 + E_z^3 = 0, & H_x^1 + H_y^2 + H_z^3 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

قوانین پایستاری:

یکی از کاربردهای مستقیم نظریه تقارن در فیزیک را می‌توان در مفهوم قوانین پایستاری جستجو کرد. مفهوم تقارن به واسطه قضیه ارزشمند و مشهور نوتر [۴] به قانون پایستاری گره می‌خورد به گونه‌ای که به جرات می‌توان گفت که این قضیه مهم‌ترین راه قابل اتکا برای محاسبه قوانین پایستاری یک کمیت فیزیکی (یک مسئله وردش یا یک دستگاه معادلات دیفرانسیل اوایلر-لاگرانژ از منظر ریاضی آن) است.

تعریف ۱. ([۵]) دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه n -ام دلخواه $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ با متغیرهای مستقل $x = (x^1, \dots, x^p)$ و وابسته $u = (u^1, \dots, u^q)$ را در نظر می‌گیریم. یک **قانون پایستاری** برای این دستگاه یک رابطه تساوی به صورت:

$$\text{Div}(P) = 0$$

است به طوری که هر جواب از دستگاه $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ در آن برقرار باشد. در این جا $P = (P_1, \dots, P_p)$ یک p -تایی مرتب از توابع هموار $P_i(x, u^{(n)})$ است.

از دیدگاه ریاضی می‌توان نظریه قوانین پایستاری را تعمیمی از مفهوم انتگرال اولیه از نظریه معادلات دیفرانسیل منظم به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دانست.

تعریف ۲. فرض کنیم $x = (x^1, \dots, x^p)$ و $u = (u^1, \dots, u^q)$ به ترتیب متغیرهای مستقل و وابسته یک مسئله وردش مرتبه n مانند $\mathcal{L} = \int L(x, u^{(n)}) dx$ با تابع لاگرانژی $L(x, u^{(n)})$ باشد (تعاریف مربوطه را در فصل ۴ از [۵] ببینید). برای هر $1 \leq i \leq q$ عملگر اویلر i -ام مسئله وردش به صورت زیر تعریف می شود:

$$E_i := \sum_J (-D)_J \frac{\partial}{\partial u_J^i}.$$

در این جا J یک k -تایی مرتب برای $k \geq 0$ دلخواه به شکل $J = (j_1, \dots, j_k)$ است به طوری که هر یک از مولفه های آن عددی بین ۱ تا p است. منظور از $\frac{\partial}{\partial u_J^i}$ عملگر مشتق گیری u^i نسبت به x^{j_1}, \dots, x^{j_k} است و همچنین D_J را به صورت ترکیب $D_J := D_{j_1} \dots D_{j_k}$ تعریف می کنیم که در آن هر D_j عملگر مشتق گیری به شکل:

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{r=1}^q \sum_I u_{I,j}^r \frac{\partial}{\partial u_I^r}.$$

است. متناظر با مسئله وردش مزبور در این تعریف، دستگاه معادلات دیفرانسیل با q معادله $E_i(L) \equiv 0$ و q مجهول u_1, \dots, u_q را دستگاه معادلات اویلر-لاگرانژ می نامیم.

می توان ثابت کرد که هر جواب و هر تقارن از یک مسئله وردش یک جواب و یک تقارن از دستگاه معادلات اویلر-لاگرانژ نظیر آن نیز هست.

شاید بتوان قضیه امی نوتر (۱۹۸۲-۱۹۳۵)، ریاضی دان شهیر آلمانی، را یکی از تاثیرگذارترین نتایج در نظریه حساب تغییرات دانست که بر اساس آن، با داشتن تقارن های یک مسئله وردش می توان قوانین پایستاری مربوط به دستگاه معادلات دیفرانسیل اویلر-لاگرانژ نظیر آن را محاسبه کرد.

قضیه ۳. (قضیه نوتر ۱۹۱۸). فرض کنیم میدان برداری:

$$X = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \partial_{x^i} + \sum_{j=1}^q \eta_j(x, u) \partial_{u^j}$$

یک تقارن از مسئله وردش $\mathcal{L} = \int L(x, u^{(n)}) dx$ باشد. برای $j = 1, \dots, q$ قرار می دهیم:

$$Q_j(u, v) = \eta_j - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^j.$$

در این صورت، q -تایی مرتب $Q = (Q_1, \dots, Q_q)$ مشخصه‌ای از یک قانون پایستاری برای معادله اویلر-لاگرانژ مسئله وردش مزبور است. به عبارت دقیق‌تر، p -تایی مرتب $P = (P_1, \dots, P_p)$ از توابع بر حسب x و مشتقات u وجود دارد به-طوری که معادله:

$$\text{Div } P = Q \cdot E(L) = \sum_{j=1}^q Q_j \cdot E_j(L)$$

یک قانون پایستاری برای معادله اویلر-لاگرانژ $E(L) = 0$ است. به خصوص اگر $\int L(x, u^{(1)}) dx$ یک مسئله وردش مرتبه اول باشد آن‌گاه توابع:

$$P_i = \xi^i L - \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^p \xi^k u_k^j \frac{\partial L}{\partial u_k^j}, \quad i = 1, \dots, p$$

یک قانون پایستاری برای معادله اویلر-لاگرانژ متناظر تشکیل خواهند داد.

۲. روش ابراگیموف

اگر چه همان‌گونه که گفته شد قضیه نوتر به‌واقع از جمله مهم‌ترین نتایج موجود در نظریه حساب تغییرات برای محاسبه قوانین پایستاری است اما باین حال این قضیه خالی از نقطه ضعف نیز نیست. در واقع مهم‌ترین اشکال موجود قضیه نوتر آن است که تنها برای محاسبه قوانین پایستاری معادلاتی قابل استفاده است که خود، معادلات اویلر-لاگرانژ نظیر یک مسئله وردش با لاگرانژی مشخص هستند. به همین خاطر، این قضیه خصوصا در مورد دستگاه‌هایی که تعداد معادلات آن‌ها برابر مجهولاتشان نیست (مثل معادلات ماکسول) تقریبا خالی از فایده است زیرا برای این‌گونه معادلات اساسا تعریف لاگرانژی و مسئله وردش نظیر ممکن نیست. باین حال نیل ابراگیموف، ریاضی‌دان روس تبار سوئدی، در سال‌های ۲۰۰۷ و ۲۰۱۱ روش‌هایی به‌ترتیب تحت عناوین خودالحاقی [۱] و شبه‌خودالحاقی [۳] ابداع کرد که بر اساس آن‌ها، امکان محاسبه قوانین پایستاری یک دستگاه معادلات دیفرانسیل حتی غیراویلر-لاگرانژ نیز وجود دارد. در این بخش به معرفی مقدمات مربوط به این روش‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۴. دستگاه الحاقی متناظر با یک دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه n مانند

$$F_\alpha \left(x, u, u', \dots, u^{(n)} \right) \equiv 0, \quad \alpha = 1, \dots, m$$

با متغیرهای وابسته $u = u^1, \dots, u^m$ (دقت کنید که تعداد معادلات و متغیرهای وابسته برابر است)، دستگاهی است با

مشتقات جزئی مجددا از مرتبه n ، دارای $2m$ متغیر وابسته $u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^m$ و تعریف شده به‌صورت زیر:

$$F_{\alpha}^* \left(x, u, v, \dots, u^{(n)}, v^{(n)} \right) = \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial \left(v^{\beta} F_{\beta} \right)}{\partial u^{\alpha}} \equiv 0, \quad \alpha = 1, \dots, m.$$

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را خودالحاقی می‌نامیم هرگاه با قرار دادن $v^{\alpha} = u^{\alpha}$ در معادله الحاقی نظیر آن دستگاه:

$$F_{\alpha}^* \left(x, u, u, u', u', \dots, u^{(n)}, u^{(n)} \right) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m$$

با دستگاه معادلات اصلی معادل باشد. همچنین این دستگاه را شبه خودالحاقی می‌نامیم هرگاه تغییر مختصاتی مانند $v^{\alpha} = \varphi^{\alpha}(u)$ برای $\alpha = 1, \dots, m$ آن را به دستگاهی معادل با دستگاه اولیه تبدیل کند. بدیهی است که هر دستگاه خودالحاقی، شبه خودالحاقی نیز هست.

مهم‌ترین نتایج ابراگیموف را می‌توان در قضیه زیر خلاصه کرد.

قضیه ۵. ([۳، ۱]) دستگاه معادلات دیفرانسیل $2m$ معادله و $2m$ مجهولی مرتبه n زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\Delta \left(x, u, v, \dots, u^{(n)}, v^{(n)} \right) = \begin{cases} F_{\alpha} \left(x, u, \dots, u^{(n)} \right) \equiv 0, \\ F_{\alpha}^* \left(x, u, v, \dots, u^{(n)}, v^{(n)} \right) \equiv 0. \end{cases} \quad \alpha = 1, \dots, m$$

که در آن $F_{\alpha}^* \equiv 0$ معادله الحاقی متناظر با $F_{\alpha} \equiv 0$ است. همچنین فرض کنیم که میدان برداری:

$$X = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \eta^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}$$

یک تقارن از دستگاه $F_{\alpha} = 0, \alpha = 1, \dots, m$ باشد. در این صورت تابع:

$$L \left(x, u, v, \dots, u^{(n)}, v^{(n)} \right) = \sum_{\beta=1}^m v^{\beta} F_{\beta} \left(x, u, \dots, u^{(n)} \right)$$

لاگرانژی است که Δ دستگاه معادلات اویلر-لاگرانژ متناظر با مسئله وردش آن است. همچنین داریم:

الف) اگر دستگاه $F_\alpha \equiv 0$ خودالحاقی باشد، آن‌گاه با قراردادن $v = u$ در L ، یک لاگرانژی برای این دستگاه خواهیم داشت. به‌علاوه، اگر برای هر $i = 1, \dots, p$ تعریف کنیم:

$$C^i = \xi^i(L) + W^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - D_j \left(\frac{\partial}{\partial u_{ij}^\alpha} \right) + D_j D_k \left(\frac{\partial}{\partial u_{ijk}^\alpha} \right) \right) + D_j \left(W^\alpha \right) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\alpha} - D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha} \right) + \dots \right) + D_j D_k \left(W^\alpha \right) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha} - \dots \right), \quad (2)$$

که در آن $W^\alpha := \eta^\alpha - \sum_{j=1}^p \xi_j^\alpha u_j^\alpha$ است، آن‌گاه بردار تابعی $C = (C^1, \dots, C^p)$ یک قانون پایستاری برای دستگاه معادلات Δ خواهد بود به‌طوری‌که اگر هر v^α را با u^α در ضابطه آن تعویض کنیم یک قانون پایستاری برای دستگاه اولیه $F_\alpha \equiv 0$ به‌دست می‌آید.

ب) اگر دستگاه $F_\alpha \equiv 0$ شبه‌خودالحاقی به‌واسطه تغییر مختصات $v^\alpha = \varphi^\alpha(u)$ باشد، آن‌گاه بردار تابعی $C = (C^1, \dots, C^p)$ یک قانون پایستاری برای دستگاه معادلات Δ نیز هست به‌طوری‌که اگر هر v^α را با $\varphi^\alpha(u)$ در تعویض کنیم یک قانون پایستاری برای دستگاه $F_\alpha \equiv 0$ خواهیم داشت.

در نگاه اول چنین به‌نظر می‌رسد که قضیه بالا نیز دارای این نقطه ضعف است که دستگاه اولیه $F_\alpha \equiv 0$ می‌بایست دارای تعداد معادلات و متغیرهای وابسته برابر باشد. با این حال، همان‌گونه که در بخش بعد خواهیم دید در بسیاری مواقع و از جمله در رابطه با معادلات ماکسول، این نقیصه ظاهری قابل حل است.

۳. محاسبه قوانین پایستاری معادلات ماکسول با روش شبه‌خودالحاقی

اکنون دستگاه معادلات ماکسول (۱) را در نظر می‌گیریم. این دستگاه دارای ۸ معادله و شش مجهول است و به‌دلیل همین عدم تساوی، امکان ساخت لاگرانژی متناظر و در نتیجه محاسبه قوانین پایستاری آن با استفاده از قضیه نوتر وجود ندارد. با این حال ابرایگیموف در مقاله [۲] و با استفاده از روش خودالحاقی به محاسبه برخی قوانین پایستاری این دستگاه از معادلات دیفرانسیل پرداخته است. او ابتدا با حذف دو معادله آخر از دستگاه (۱) آن‌را به یک دستگاه (تقلیل‌یافته)

خودالحاقی با تعداد معادلات و مجهولات برابر شش تبدیل کرد و سپس با استفاده از قسمت الف قضیه ۵ لاگرانژی و تعدادی از قوانین پایستاری دستگاه تقلیل یافته را، که قوانین پایستاری خود معادلات ماکسول نیز هستند، محاسبه نمود.

اما روشی که ما در این مقاله دنبال خواهیم کرد روش شبه خودالحاقی است. ما در ابتدا، بر خلاف ابراگیموف، دو معادله ردیف دوم از دستگاه معادلات ماکسول (۱) را حذف می‌کنیم. به این ترتیب دستگاه شش معادله و مجهول $E^1, E^2, E^3, H^1, H^2, H^3$ زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} F_1 = E_z^1 - E_x^3 + H_t^2 = 0 \\ F_2 = E_x^2 - E_y^1 + H_t^3 = 0 \\ F_3 = E_x^1 + E_y^2 + E_z^3 = 0 \\ F_4 = H_z^1 - H_x^3 - E_t^2 = 0 \\ F_5 = H_x^2 - H_y^1 - E_t^3 = 0 \\ F_6 = H_x^1 + H_y^2 + H_z^3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

با انجام محاسبات لازم و با فرض $v = (v^1, v^2, v^3, u^1, u^2, u^3)$ به عنوان متغیرهای جدید اضافه شده (قضیه ۵ را ببینید)،

معادلات الحاقی متناظر با شش معادله بالا عبارتند از:

$$\begin{cases} F_1^* = -u_x^3 + u_y^2 - u_z^1 = 0 \\ F_2^* = -u_x^2 - u_y^3 + v_t^1 = 0 \\ F_3^* = u_x^1 - u_z^3 + v_t^2 = 0 \\ F_4^* = -v_x^3 + v_y^2 - v_z^1 = 0 \\ F_5^* = -v_x^2 - v_y^3 - u_t^1 = 0 \\ F_6^* = v_x^1 - v_z^3 - u_t^2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

حال اگر $\Delta := \Delta(x, y, z, t, E, H, u, v)$ را دستگاه حاصل از ۱۲ معادله (۳) و (۴) بدانیم آن‌گاه طبق قضیه ۵، لاگرانژی

زیر را برای این دستگاه دوازده مجهولی خواهیم داشت:

$$L := u^1 \begin{pmatrix} E_z^1 - E_x^3 + H_t^2 \\ E_x^2 - E_y^1 + H_t^3 \\ E_x^1 + E_y^2 + E_z^3 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} E_x^2 - E_y^1 + H_t^3 \\ E_x^1 + E_y^2 + E_z^3 \\ H_x^1 - H_x^3 - E_t^2 \end{pmatrix} + u^3 \begin{pmatrix} E_x^1 + E_y^2 + E_z^3 \\ H_x^2 - H_y^1 - E_t^3 \\ H_x^1 + H_y^2 + H_z^3 \end{pmatrix} + v^1 \begin{pmatrix} H_z^1 - H_x^3 - E_t^2 \\ H_x^2 - H_y^1 - E_t^3 \\ H_x^1 + H_y^2 + H_z^3 \end{pmatrix} + v^2 \begin{pmatrix} H_x^2 - H_y^1 - E_t^3 \\ H_x^1 + H_y^2 + H_z^3 \\ H_x^1 - H_x^3 - E_t^2 \end{pmatrix} + v^3 \begin{pmatrix} H_x^1 + H_y^2 + H_z^3 \\ H_x^1 - H_x^3 - E_t^2 \\ H_x^2 - H_y^1 - E_t^3 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

از سوی دیگر، همچنین می‌توان دید که دستگاه (۳) شبه‌خودالحاقی است. در واقع، مقایسه این دستگاه با (۴) نشان می‌دهد که با اعمال تغییر مختصات به صورت:

$$\begin{cases} u^1 = -E^3, \\ u^2 = E^2, \\ u^3 = -E^1, \end{cases} \quad \begin{cases} v^1 = -H^3, \\ v^2 = H^2, \\ v^3 = -H^1, \end{cases} \quad (6)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F_1^* &= F_3, & F_2^* &= -F_2, & F_3^* &= F_1, \\ F_4^* &= F_6, & F_5^* &= -F_5, & F_6^* &= F_4. \end{aligned}$$

ذکر این نکته ضروری است که بر اساس قضیه ۵، با توجه به این‌که دستگاه (۳) شبه‌خودالحاقی و نه خودالحاقی است، بنابراین برخلاف روش ابراگیموف [۲] لاگرانژی متناظر با این دستگاه را در اختیار نخواهیم داشت و به همین دلیل روش ادامه کار در این مقاله نسبتاً متفاوت خواهد بود.

یافتن تقارن‌های دستگاه تقلیل یافته (۳):

بر اساس محک پایستاری^۲ (قضیه ۲،۷۱ از [۵])، میدان برداری

$$X = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

یک تقارن از دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta \left(x, u^{(n)} \right)$ است هرگاه $X^{(n)}(\Delta)$ روی جواب‌های این دستگاه صفر شود. در این‌جا، $X^{(n)}$ توسیع مرتبه n -ام میدان برداری X است.

تعداد تقارن‌های دستگاه معادلات ماکسول (۱) برابر هفده و ضابطه آن‌ها در صفحات ۱۵۸ و ۱۵۹ از [۲] آمده است. برای یافتن زیرجبر لی بیشینه این جبر لی تقارنی که شامل تقارن‌های دستگاه (۳) باشد کفایت آن‌ها را از میان تقارن‌های

² Invariance criteria

مزبور و با استفاده از محک پایستاری بیابیم. بر این اساس و با انجام محاسبات لازم می‌توان هشت تقارن زیر را برای دستگاه (۳) یافت:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_0 = E \cdot \frac{\partial}{\partial H} - H \cdot \frac{\partial}{\partial E}, \\ Z_1 = E \cdot \frac{\partial}{\partial E} + H \cdot \frac{\partial}{\partial H}, \\ Z_2 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}, \\ S = E_*(x,t) \cdot \frac{\partial}{\partial E} + H_*(x,t) \cdot \frac{\partial}{\partial H}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \\ \chi_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \\ \chi_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \\ \chi_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \end{array} \right. \quad (V)$$

در این جا E_* و H_* می‌تواند هر جواب دستگاه معادلات ماکسول (۱) باشد.

محاسبه قوانین پایستگی:

پس از یافتن تقارن‌های (V) از دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳)، اکنون این امکان را داریم که با توجه به شبه خودالحاقی بودن این دستگاه و بر اساس قسمت ب از قضیه ۵ به محاسبه قانون پایستاری متناظر با هر یک از این تقارن‌های هشت‌گانه بپردازیم. با توجه به این‌که محاسبات مربوطه اندکی طولانی است و نیاز به فضای زیادی دارد در این‌جا محاسبات و نحوه بررسی آن‌ها را در مورد میدان تقارنی انتقال زمان χ_3 با ارائه جزئیات توضیح می‌دهیم و نتایج مربوط به سایر میدان‌ها را به‌طور خلاصه در جدول انتهایی مقاله نمایش خواهیم داد.

انتقال زمان $\chi_3 = \partial / \partial t$:

با توجه به نمادهای موجود در قضیه ۵، در این‌جا داریم:

$$\xi^i = 1, \quad \xi^i = \eta^\alpha = 0, \quad i, \alpha = 1, 2, 3.$$

حال با جایگزین کردن ξ^i و η^α در ضابطه مربوط به W^α خواهیم داشت:

$$W^\alpha = \eta^\alpha - \sum_j \xi^j u_j^\alpha = -u_t^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

در ادامه با جایگذاری روابط (۶) در رابطه لاگرانژی (۵) به دست خواهیم آورد:

$$L := -E^r (E_z^l - E_x^r + H_t^r) + E^r (E_x^l - E_y^r + H_t^r) - E^l (E_x^l + E_y^r + E_z^r) - H^r (H_z^l - H_x^r - E_t^r) + H^r (H_x^l - H_y^r - E_t^r) - H^l (H_x^l + H_y^r + H_z^r),$$

اکنون با قرار دادن W^α و لاگرانژی بالا در روابط (۲)، قوانین پایستاری زیر متناظر با تقارن انتقال زمان را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 C^{\cdot} &= \xi^{\cdot} L - u_t^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_t^{\alpha}} \\
 &= L - \left(-E_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial E_t^{\cdot}} \right) - \left(E_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial E_t^{\cdot}} \right) - \left(-E_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial E_t^{\cdot}} \right) - \left(-H_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial H_t^{\cdot}} \right) - \left(H_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial H_t^{\cdot}} \right) - \left(-H_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial H_t^{\cdot}} \right) \\
 &= L - E_t^{\cdot} H^{\cdot} + E_t^{\cdot} H^{\cdot} + H_t^{\cdot} E^{\cdot} - H_t^{\cdot} E^{\cdot}. \\
 \\
 C^{\cdot'} &= -u_t^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_x^{\alpha}} \\
 &= - \left(-E_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial E_x^{\cdot}} \right) - \left(E_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial E_x^{\cdot}} \right) - \left(-E_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial E_x^{\cdot}} \right) - \left(-H_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial H_x^{\cdot}} \right) - \left(H_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial H_x^{\cdot}} \right) - \left(-H_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial H_x^{\cdot}} \right) \\
 &= E_t^{\cdot} E^{\cdot} - E_t^{\cdot} E^{\cdot} - E_t^{\cdot} E^{\cdot} + H_t^{\cdot} H^{\cdot} - H_t^{\cdot} H^{\cdot} - H_t^{\cdot} H^{\cdot}, \\
 \\
 C^{\cdot''} &= -u_t^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_y^{\alpha}} \\
 &= - \left(-E_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial E_y^{\cdot}} \right) - \left(E_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial E_y^{\cdot}} \right) - \left(-E_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial E_y^{\cdot}} \right) - \left(-H_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial H_y^{\cdot}} \right) - \left(H_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial H_y^{\cdot}} \right) - \left(-H_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial H_y^{\cdot}} \right) \\
 &= -E_t^{\cdot} E^{\cdot} + E_t^{\cdot} E^{\cdot} + H_t^{\cdot} H^{\cdot} + H_t^{\cdot} H^{\cdot}, \\
 \\
 C^{\cdot'''} &= -u_t^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_z^{\alpha}} \\
 &= - \left(-E_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial E_z^{\cdot}} \right) - \left(E_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial E_z^{\cdot}} \right) - \left(-E_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial E_z^{\cdot}} \right) - \left(-H_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial H_z^{\cdot}} \right) - \left(H_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial H_z^{\cdot}} \right) - \left(-H_t^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial H_z^{\cdot}} \right) \\
 &= E_t^{\cdot} E^{\cdot} + E_t^{\cdot} E^{\cdot} + H_t^{\cdot} H^{\cdot} + H_t^{\cdot} H^{\cdot}.
 \end{aligned}$$

در جدول زیر نتایج مربوط به قوانین پایستاری متناظر با تقارن‌های هشت‌گانه ماکسول را داریم:

جدول ۱. نتایج مربوط به قوانین پایستاری

میدان تقارنی	C^{\cdot}	$C^{\cdot'}$	$C^{\cdot''}$	$C^{\cdot'''}$
X^{\cdot}	$L - E_t^{\cdot} H^{\cdot} + E_t^{\cdot} H^{\cdot} + H_t^{\cdot} E^{\cdot} - H_t^{\cdot} E^{\cdot}$	$E_t^{\cdot} E^{\cdot} - E_t^{\cdot} E^{\cdot} - E_t^{\cdot} E^{\cdot} + H_t^{\cdot} H^{\cdot} - H_t^{\cdot} H^{\cdot} - H_t^{\cdot} H^{\cdot}$	$E_t^{\cdot} E^{\cdot} + E_t^{\cdot} E^{\cdot} + H_t^{\cdot} H^{\cdot} + H_t^{\cdot} H^{\cdot}$	$E_t^{\cdot} E^{\cdot} + E_t^{\cdot} E^{\cdot} + H_t^{\cdot} H^{\cdot} + H_t^{\cdot} H^{\cdot}$
$X^{\cdot'}$	$-E_x^{\cdot} H^{\cdot} + E_x^{\cdot} H^{\cdot} + H_x^{\cdot} E^{\cdot} - H_x^{\cdot} E^{\cdot}$	$L + E_x^{\cdot} E^{\cdot} - E_x^{\cdot} E^{\cdot} - E_x^{\cdot} E^{\cdot} + H_x^{\cdot} H^{\cdot} - H_x^{\cdot} H^{\cdot} - H_x^{\cdot} H^{\cdot}$	$E_x^{\cdot} E^{\cdot} + E_x^{\cdot} E^{\cdot} + H_x^{\cdot} H^{\cdot} + H_x^{\cdot} H^{\cdot}$	$E_x^{\cdot} E^{\cdot} + E_x^{\cdot} E^{\cdot} + H_x^{\cdot} H^{\cdot} + H_x^{\cdot} H^{\cdot}$
$X^{\cdot''}$	$-E_y^{\cdot} H^{\cdot} + E_y^{\cdot} H^{\cdot} + H_y^{\cdot} E^{\cdot}$	$E_y^{\cdot} E^{\cdot} - E_y^{\cdot} E^{\cdot} - E_y^{\cdot} E^{\cdot} + H_y^{\cdot} H^{\cdot} - H_y^{\cdot} H^{\cdot} - H_y^{\cdot} H^{\cdot}$	$L + E_y^{\cdot} E^{\cdot} + E_y^{\cdot} E^{\cdot} + H_y^{\cdot} H^{\cdot} + H_y^{\cdot} H^{\cdot}$	$E_y^{\cdot} E^{\cdot} + E_y^{\cdot} E^{\cdot} + H_y^{\cdot} H^{\cdot} + H_y^{\cdot} H^{\cdot}$
$X^{\cdot'''}$	$-E_z^{\cdot} H^{\cdot} + E_z^{\cdot} H^{\cdot} + H_z^{\cdot} E^{\cdot} - H_z^{\cdot} E^{\cdot}$	$E_z^{\cdot} E^{\cdot} - E_z^{\cdot} E^{\cdot} - E_z^{\cdot} E^{\cdot} + H_z^{\cdot} H^{\cdot} - H_z^{\cdot} H^{\cdot} - H_z^{\cdot} H^{\cdot}$	$E_z^{\cdot} E^{\cdot} + E_z^{\cdot} E^{\cdot} + H_z^{\cdot} H^{\cdot} + H_z^{\cdot} H^{\cdot}$	$L + E_z^{\cdot} E^{\cdot} + E_z^{\cdot} E^{\cdot} + H_z^{\cdot} H^{\cdot} + H_z^{\cdot} H^{\cdot}$

جدول ۱. نتایج مربوط به قوانین پایستاری

میدان تقارنی	C^0	C^1	C^2	C^3
Z^0
Z^1	$-E_z^y H^z + E_z^x H^y$ $+H_z^y E^x - H_z^x E^y$	$E_z^x E^y - E_z^y E^x - E_z^z E^z$ $+H_z^x H^y - H_z^y H^x - H_z^z H^z$	$E_z^x E^y + E_z^y E^x$ $+H_z^x H^y + H_z^y H^x$	$L + E_z^x E^y + E_z^y E^x$ $+H_z^x H^y + H_z^y H^x$
Z^2	tL $-H^y (tE_t^y + xE_x^y + yE_y^y + zE_z^y)$ $+H^x (tE_t^x + xE_x^x + yE_y^x + zE_z^x)$ $+E^z (tH_t^z + xH_x^z + yH_y^z + zH_z^z)$ $-E^y (tH_t^y + xH_x^y + yH_y^y + zH_z^y)$	$xL + E^y (tE_t^y + xE_x^y + yE_y^y + zE_z^y)$ $-E^x (tE_t^x + xE_x^x + yE_y^x + zE_z^x)$ $-E^z (tE_t^z + xE_x^z + yE_y^z + zE_z^z)$ $+H^y (tH_t^y + xH_x^y + yH_y^y + zH_z^y)$ $-H^x (tH_t^x + xH_x^x + yH_y^x + zH_z^x)$ $-H^z (tH_t^z + xH_x^z + yH_y^z + zH_z^z)$	yL $+E^x (tE_t^x + xE_x^x + yE_y^y + zE_z^x)$ $+E^y (tE_t^y + xE_x^y + yE_y^y + zE_z^y)$ $+H^x (tH_t^x + xH_x^x + yH_y^x + zH_z^x)$ $+H^y (tH_t^y + xH_x^y + yH_y^y + zH_z^y)$	zL $+E^z (tE_t^z + xE_x^z + yE_y^z + zE_z^z)$ $+H^z (tH_t^z + xH_x^z + yH_y^z + zH_z^z)$ $+H^x (tH_t^x + xH_x^x + yH_y^x + zH_z^x)$ $+H^y (tH_t^y + xH_x^y + yH_y^y + zH_z^y)$
S	$-E_z^y H^z + E_z^x H^y$ $+H_z^y E^x - H_z^x E^y$	$E_z^x E^y - E_z^y E^x - E_z^z E^z$ $+H_z^x H^y - H_z^y H^x - H_z^z H^z$	$E_z^x E^y + E_z^y E^x$ $+H_z^x H^y + H_z^y H^x$	$L + E_z^x E^y + E_z^y E^x$ $+H_z^x H^y + H_z^y H^x$

دقت داشته باشیم که قانون پایستاری متناظر با میدان تقارنی Z^0 قانون بدیهی صفر است که مسلماً فاقد هیچ گونه ارزشی است.

مراجع

- [1] N. H. Ibragimov, A new conservation theorem, J. Math. Anal. Appl. **333** (2007) 311-328.
- [2] N.H. Ibragimov, Symmetries, Lagrangian and conservation laws for the Maxwell equations, Acta. Appl. Math. 105 (2009) 157-187.
- [3] N. H. Ibragimov, Nonlinear self-adjointness and conservation laws, J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011) 432002.
- [4] D.E. Neuenschwander, Emmy Neother's Wonderful theorem, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2011.
- [5] P.J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, 1986.