



درباره نگاشت‌های انقباضی $\alpha - \omega$ - میر-کیبلر

محدثه پاک‌نظر^۱

دانشکده ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، ایران

چکیده: در این مقاله ما کلاس نگاشت‌های انقباضی $\alpha - \omega$ - میر-کیبلر را معرفی می‌کنیم و بعضی نتایج نقطه ثابت را برای این نگاشت‌ها پایه گذاری می‌کنیم. به عنوان نتیجه، قضایای نقطه ثابت را در فضاهای مدولار متری که به ترتیب جزئی و گراف مجهز هستند به دست می‌آوریم. چند مثال برای نشان دادن کاربردی بودن نتایج آورده شده است.

کلمات کلیدی: فضای متری مدولار؛ نگاشت‌های انقباضی $\alpha - \omega$ - میر-کیبلر؛ نقطه ثابت.

۱. سرآغاز

فضاهای متری مدولار تعمیم طبیعی از مدولارهای قدیمی روی فضاهای خطی مانند، لبگ، اورلیکس، میزلاک-اورلیکس، لورنتز، اورلیکس-لورنتز، کلدرانلوانفسکی و بسیاری دیگر هستند. فضای مدولار متری در [۱-۲] تعریف شده است. مقدمه این مفهوم جدید به وسیله برداشت فیزیکی از مدولار توجیه شده است. به این صورت که متر روی یک مجموعه نشان دهنده فاصله غیر منفی بین دو نقطه مجموعه است، یک مدولار نیز روی یک مجموعه نشان دهنده میدان سرعت‌ها برای هر لحظه $\lambda > 0$ است. در حقیقت سرعت متوسط $\omega_\lambda(x, y)$ بیان می‌کند که برای حرکت بین دو نقطه x و y زمان λ صرف شده است. اما در این مقاله نسخه‌های قدیمی و غیرخطی مدولار که توسط ناکانو [۳] در فضاهای برداری و فضاهای تابعی مدولار که توسط میزلاک [۴] و اورلیکس [۵] تعریف شده‌اند را در نظر می‌گیریم. در سال‌های اخیر محققان زیادی در زمینه رفتارهای الکترورنولوژی سیال‌ها مطالعه کرده‌اند که بعضی مواقع از آن به عنوان سیال‌های هوشمند نام برده شده است (به عنوان مثال لیتیم پلی متاکریلات). یک مدل جالب برای این سیال‌ها با استفاده از فضاهای لبگ، لبولو،

^۱ نویسنده مسئول مکاتبات (رایانامه: paknazar@cfu.ac.ir)

تاریخ دریافت: اردیبهشت ۱۳۹۶؛ تاریخ پذیرش: تیر ۱۳۹۶

L^p و $W^{1,p}$ به دست آمده است که در آن p یک تابع می‌باشد [۶]. در این راستا نگرش رایج در رابطه با مسئله دیرکله [۷-۸]، تبدیل تابعی انرژی (که ذاتاً به وسیله مدولار تعریف شده است) یک مسئله پیچیده است که شامل نرم لوکسانبرگ می‌باشد. در بسیاری از موارد، به ویژه در کاربردهای عملگرهای انتگرالی، نتایج نقاط ثابت و تقریبی، شرایط مدولار بسیار طبیعی است، چون فرض‌هایی از نوع مدولار می‌توانند بسیار آسان‌تر از نقطه مقابلشان، یعنی متر و نرم تمایز داده شوند. مطالعه وجود نقطه ثابت در فضاهای تابعی مدولار اولین بار در مقاله [۹] انجام شد و بعد از آن پژوهشگران علاقه شدیدی برای مطالعه در این راستا پیدا کردند. خوانندگان می‌توانند برای اطلاع بیشتر در نظریه نقطه ثابت به کتاب [۱۰] و برای اطلاع بیشتر در فضاهای تابعی مدولار به کتاب [۱۱] مراجعه کنند. در جهت تعمیم اصل انقباضی باناخ تلاش‌های زیادی انجام شده است که نتیجه آن تعاریف گوناگون نامساوی انقباضی می‌باشد. در سال ۱۹۶۹، مییر و کیپلر [۱۲] قضیه جالب زیر را به دست آوردند.

قضیه ۱. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل و $T: X \rightarrow X$ یک نگاشت باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$ و هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta(\varepsilon) > 0$ وجود داشته باشد که

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(Tx, Ty) < \varepsilon.$$

در این صورت T یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد.

قضیه مییرکیپلر از جنبه‌های زیادی توسعه داده شده است ([۱۳-۱۵] و مراجع درون آن را ببینید).

در این مقاله ما کلاس نگاشت‌های انقباضی $\omega - \alpha$ - مییر - کیپلر را معرفی می‌کنیم و بعضی نتایج نقطه ثابت را برای این نگاشت‌ها پایه‌گذاری می‌کنیم. به عنوان نتیجه، ما قضایای نقطه ثابت را در فضاهای مدولاری که به ترتیب جزئی و گراف مجهز هستند به دست می‌آوریم. چند مثال برای نشان دادن کاربردی بودن نتایج آورده شده است.

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $\omega: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ یک تابع باشد. برای راحتی کار به ازای هر $x, y \in X$ و $\lambda > 0$ خواهیم نوشت

$$\omega_\lambda(x, y) = \omega(\lambda, x, y).$$

تعریف ۱. ([۲-۱]) تابع $\omega: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ یک متر مدولار روی X نامیده می‌شود هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

$$(i) \quad \omega_\lambda(x, y) = 0, \quad \lambda > 0 \quad \text{هر } x = y \text{ اگر و فقط اگر}$$

$$(ii) \quad \text{به ازای هر } x, y \in X \text{ و } \lambda > 0 \text{ داریم, } \omega_\lambda(x, y) = \omega_\lambda(y, x),$$

$$(iii) \quad \text{به ازای هر } x, y, z \in X \text{ و } \lambda, \mu > 0 \text{ داریم } \omega_{\lambda+\mu}(x, y) \leq \omega_\lambda(x, z) + \omega_\mu(z, y)$$

اگر در تعریف ۱ شرط

$$(I') \quad \omega_\lambda(x, x) = 0, \text{ به ازای هر } x \in X \text{ و } \lambda > 0 \text{ داریم،}$$

را بجای شرط (i) قرار دهیم، آن‌گاه گوئیم ω یک مترشبه مدولار روی X است. گوئیم مدولار متریک ω روی X منظم است هرگاه شرط ضعیف زیر به جای (i) برقرار باشد

$$(i) \quad x = y \text{ اگر و فقط اگر برای بعضی } \lambda > 0, \omega_\lambda(x, y) = 0.$$

همچنین گوئیم ω محدب است هرگاه به ازای هر $x, y, z \in X$ و $\lambda, \mu > 0$ داشته باشیم

$$\omega_{\lambda+\mu}(x, y) \leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \omega_\lambda(x, z) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \omega_\mu(z, y).$$

تبصره ۱. اگر ω یک مترشبه مدولار روی X باشد، آن‌گاه تابع $\lambda \rightarrow \omega_\lambda(x, y)$ نزولی است. در حقیقت اگر $0 < \mu < \lambda$ ، آن‌گاه

$$\omega_\lambda(x, y) \leq \omega_{\lambda-\mu}(x, x) + \omega_\mu(x, y) = \omega_\mu(x, y).$$

تعریف ۲. [۲-۱] فرض کنید ω یک مترشبه مدولار روی X و $x_0 \in X$ ثابت باشد. مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$X_\omega = X_\omega(x) = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \omega_\lambda(x, x) = 0 \right\}$$

و

$$X_\omega^* = X_\omega^*(x) = \left\{ x \in X : \exists \lambda = \lambda(x) (\omega_\lambda(x, x) < \infty) \right\}.$$

X_ω و X_ω^* فضاهای مدولار نامیده می‌شوند (حول x).

به وضوح در حالت کلی داریم، $X_\omega \subset X_\omega^*$. فرض کنید ω یک مدولار روی X باشد. در [۲-۱] ثابت شده است که یک فضای متری مدولار می‌تواند به یک متر غیربیدیهی مجهز شود. این متر به ازای هر $x, y \in X_\omega$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$d_\omega(x, y) = \inf \{ \lambda > 0 : \omega_\lambda(x, y) \leq \lambda \}$$

همچنین اگر ω محدب باشد آن‌گاه $X_\omega = X_\omega^*$ که این مجموعه مشترک را می‌توان به ازای هر $x, y \in X_\omega$ به متر زیر مجهز کرد.

$$d_\omega^*(x, y) = \inf \{ \lambda > 0 : \omega_\lambda(x, y) \leq \lambda \}$$

این فاصله را فاصله لوکسانبرگ می‌نامیم. مثال ۲، ۱ ارائه شده توسط خمسی و عبدو در [۱۶] مهم‌ترین انگیزه برای توسعه نظریه فضاهای متری مدولار می‌باشد. برای مثال‌های بیشتر می‌توانید به [۲-۱] مراجعه کنید.

تعریف ۳. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار، M یک زیر مجموعه X_ω و $(x_n)_{n \geq 1}$ یک دنباله در X_ω باشد. بنابراین

(۱) گوئیم $(x_n)_{n \geq 1}$ به نقطه $x \in X_\omega$ ، ω -همگرا است هرگاه به ازای هر $\lambda > 0$ داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\lambda(x_n, x) = 1$.

نقطه x را نقطه ω -حدی دنباله $(x_n)_{n \geq 1}$ می‌نامیم،

(۲) دنباله $(x_n)_{n \geq 1}$ را ω -کوشی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $\lambda > 0$ داشته باشیم $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \omega_\lambda(x_n, x_m) = 0$ ،

(۳) M را ω -بسته گوئیم هرگاه نقطه ω -حدی هر دنباله‌ای که در M قرار دارد نیز نقطه‌ای از M باشد،

(۴) M را ω -کامل گوئیم هرگاه هر دنباله ω -کوشی در آن ω -همگرا به نقطه‌ای در M باشد،

(۵) M را ω -کامل گوئیم هرگاه داشته باشیم

$$\delta_\omega(M) = \sup\{\omega_\lambda(x, y) : x, y \in M\} < \infty$$

صامت و همکارانش [۱۷] مفهوم نگاشت α -پذیرفتنی را به صورت زیر تعریف کردند.

تعریف ۴. [۱۷] فرض کنید T یک خود نگاشت روی X و $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ یک تابع باشد. گوئیم T یک نگاشت α -پذیرفتنی است هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geq 1.$$

همچنین کاراپینار و همکاران [۱۴] نگاشت α -پذیرفتنی مثلثی را به صورت زیر تعریف کردند.

تعریف ۵. [۱۴] فرض کنید T یک خود نگاشت روی X و $\alpha : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ یک تابع باشد. گوئیم T یک نگاشت α -پذیرفتنی مثلثی است هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$(I) \alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geq 1$$

$$(II) \begin{cases} \alpha(x, z) \geq 1 \\ \alpha(z, y) \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha(x, y) \geq 1$$

لم ۱. [۱۴] فرض کنید T یک نگاشت α -پذیرفتنی مثلثی است. همچنین فرض کنید $x \in X$ ای وجود دارد به طوری که

$\alpha(x, Tx) \geq 1$. دنباله $(x_n)_{n \geq 1}$ را به صورت $x_n = T^n x$ تعریف می‌کنیم. در این صورت به ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$ که

$$m < n \text{ داریم } \alpha(x_m, x_n) \geq 1.$$

۲. نتایج اصلی

این فصل را با یک تبصره ساده ولی مفید شروع می‌کنیم.

تبصره ۲. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار باشد به طوری که ω منظم است. در ای صورت به ازای هر $x, y \in X_\omega$ که $x \neq y$ داریم، $\omega_\lambda(x, y) > 0$.

برهان: فرض کنید $x \neq y$. فرض کنید $\lambda > 0$ وجود دارد به طوری که $\omega_\lambda(x, y) = 0$. حال از منظم بودن ω نتیجه می‌گیریم $x = y$ که یک تناقض است. \square

نگاشت‌های انقباضی $\omega - \alpha$ - میسر-کیبلر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۶. فرض کنید T یک خود نگاشت روی فضای متری مدولار X_ω باشد. همچنین فرض کنید $\alpha : X_\omega \times X_\omega \rightarrow [0, \infty)$ یک تابع باشد. گوئیم T یک نگاشت انقباضی $\omega - \alpha$ - میسر-کیبلر است هرگاه برای هر $x, y \in X_\omega$ و هر $\varepsilon > 0, \delta > 0$ ای وجود داشته باشد که

$$\begin{cases} \varepsilon \leq \omega_\lambda(x, y) < \varepsilon + \delta \\ \alpha(x, y) \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \omega_\lambda(Tx, Ty) < \varepsilon \quad (1)$$

تبصره ۳. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار باشد به طوری که ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک نگاشت انقباضی $\omega - \alpha$ - میسر-کیبلر باشد. بنابراین به ازای هر $x, y \in X$ و $\lambda > 0$ که $\alpha(x, y) \geq 1$ داریم

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) < \omega_\lambda(x, y)$$

همچنین اگر $x = y$ آن‌گاه $\omega_\lambda(Tx, Ty) = 0$. یعنی به ازای هر $x, y \in X$ و $\lambda > 0$ که $\alpha(x, y) \geq 1$ داریم

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) \leq \omega_\lambda(x, y)$$

برهان: چون $x \neq y$ بنابراین از تبصره ۱ به ازای هر $\lambda > 0$ داریم: $\omega_\lambda(x, y) > 0$. فرض کنید $\delta > 0$ و $\varepsilon = \omega_\lambda(x, y)$.

پس

$$\omega_\lambda(x, y) < \omega_\lambda(x, y) + \delta = \varepsilon + \delta$$

در نتیجه از (۱) داریم $\omega_\lambda(Tx, Ty) < \varepsilon = \omega_\lambda(x, y)$. \square

حال ما آماده‌ایم اولین قضیه این مقاله را اثبات کنیم.

قضیه ۱. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار ω - کامل باشد به طوری که ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک

خود نگاشت روی X_ω و $\alpha : X_\omega \times X_\omega \rightarrow [0, \infty)$ یک تابع باشد به طوری که شرایط زیر برقرار است:

(i) T یک نگاشت $\omega - \alpha$ - پذیرفتنی مثلثی است،

(ii) T یک نگاشت انقباضی $\omega - \alpha$ میسر-کیلر است،

(iii) به ازای هر $\lambda > 0$ ، $x \in X$ ای وجود دارد به طوری که $\alpha(x, Tx) \geq 1$ و $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$.

(iv) T یک نگاشت ω -پوسته است.

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به علاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $\alpha(x, y) \geq 1$ ، آن گاه نقطه ثابت منحصر به فرد است.

برهان: فرض کنید $x \in X$ ای وجود داشته باشد $\alpha(x, Tx) \geq 1$. دنباله پیکارد $\{x_n\}_{n \geq 0}$ را به صورت $x_n = T^n x = Tx_{n-1}$ تعریف می‌کنیم. چون T یک نگاشت α -پذیرفتنی مثلثی است بنابراین از لم ۱ به ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$ که $m < n$ داریم، $\alpha(x_m, x_n) \geq 1$. اگر $n \geq 0$ وجود داشته باشد به طوری که $x_n = x_{n+1}$ ، آن گاه به وضوح T یک نقطه ثابت دارد. بنابراین برای هر $n \geq 0$ فرض می‌کنیم $x_n = x_{n+1}$. در این صورت از تبصره ۱ برای $n \geq 0$ داریم $\omega_\lambda(x_n, x_{n+1}) > 0$. در نتیجه با به کار بردن تبصره ۲ داریم

$$\omega_\lambda(x_n, x_{n+1}) < \omega_\lambda(x_{n-1}, x_n) < \dots < \omega_\lambda(x, x) < \infty$$

این نشان دهنده آن است که دنباله $\{c_n = \omega_\lambda(x_n, x_{n+1})\}$ نزولی می‌باشد و $c_n = \omega_\lambda(x_n, x_{n+1}) < \infty$. پس دنباله $\{c_n\}$ به یک عدد غیرمنفی حقیقی میل می‌کند. آن عدد را c در نظر می‌گیریم. در ادامه نشان خواهیم داد که $c = 0$. بنابر برهان خلف فرض کنیم $c > 0$. در این صورت برای هر $n \geq 0$ داریم

$$0 < c < \omega_\lambda(x_n, x_{n+1}) \quad (2)$$

فرض کنید $\varepsilon = c > 0$. در نتیجه بنا بر فرض $\delta(\varepsilon) > 0$ ای وجود دارد به طوری که (۱) برقرار است. از طرف دیگر بنابر تعریف ε ، $n \in \mathbb{N}$ ای وجود دارد به طوری که

$$\varepsilon < c_n = \omega_\lambda(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon + \delta$$

حال از (۱) داریم

$$c_{n+1} = \omega_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}) = \omega_\lambda(Tx_n, Tx_{n+1}) < \varepsilon$$

که یک تناقض است. پس $c = 0$. یعنی برای هر $\lambda > 0$ داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\lambda(x_n, x_{n+1}) = 0$$

برای هر ε دلخواه $\delta(\varepsilon) > 0$ ای وجود دارد به طوری که (۱) برقرار است. بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد $\delta < \varepsilon$. چون $c = 0$. بنابراین $N \in \mathbb{N}$ ای وجود دارد به طوری که برای هر $n \geq N_0$ داریم

$$c_{n-1} = \omega_\lambda(x_{n-1}, x_n) < \delta \quad (3)$$

در ادامه نشان خواهیم داد که برای هر $l \in \mathbb{N}$ ، $k \geq N$ و $\lambda > 0$ عبارت زیر برقرار است

$$\omega_\lambda(x_k, x_{k+l}) < \varepsilon \quad (4)$$

توجه داشته باشید که (۳) و (۴) برای $l = 1$ برقرارند. فرض کنید رابطه (۴) برای $m \in \mathbb{N}$ ای برقرار باشد. یعنی

$$\omega_\lambda(x_k, x_{k+m}) < \varepsilon \quad (5)$$

برای $l = m + 1$ از (۳) و (۵) داریم

$$\omega_\lambda(x_{k-1}, x_{k+m}) \leq \omega_\lambda(x_{k-1}, x_k) + \omega_\lambda(x_k, x_{k+m}) < \varepsilon + \delta \quad (6)$$

همچنین چون $k - 1 < k + m$ بنابراین $\alpha(x_{k-1}, x_{k+m}) \geq 1$. حال اگر $\omega_\lambda(x_{k-1}, x_{k+m}) \geq \varepsilon$ لذا از (۱) و (۶) داریم

$$\omega_\lambda(x_k, x_{k+m+1}) = \omega_\lambda(Tx_{k-1}, Tx_{k+m}) < \varepsilon$$

و این یعنی (۴) برقرار است.

اگر $\omega_\lambda(x_{k-1}, x_{k+m}) < \varepsilon$ آن‌گاه با به‌کار بردن تبصره ۲ به دست می‌آوریم

$$\omega_\lambda(x_k, x_{k+m+1}) = \omega_\lambda(Tx_{k-1}, Tx_{k+m}) \leq \omega_\lambda(x_{k-1}, x_{k+m}) < \varepsilon$$

در نتیجه (۴) برای $l = m + 1$ برقرار است. پس برای هر $l \in \mathbb{N}$ و $\lambda > 0$ عبارت زیر برقرار است

$$\omega_\lambda(x_k, x_{k+l}) < \varepsilon$$

یعنی ثابت کردیم دنباله $(x_n)_{n \geq 0}$ ، ω -کوشی است. چون X_ω ، ω -کامل است، بنابراین $x^* \in X_\omega$ ای وجود دارد به طوری که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\lambda(x_n, x^*) = 0 \quad \text{حال از } \omega - \text{پیوسته بودن } T \text{ به دست می‌آوریم، } \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\lambda(Tx_n, Tx^*) = 0 \text{ پس}$$

می‌توان نوشت

$$\omega_\lambda(x^*, Tx^*) \leq \omega_\lambda(x^*, x_{n+1}) + \omega_\lambda(x_{n+1}, Tx^*)$$

که با حدگیری از طرفین به دست می‌آوریم، $\omega_\lambda(x^*, Tx^*) = 0$. پس $x^* = Tx^*$ چون ω منظم است.

فرض کنید برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $\alpha(x, y) \geq 1$. حال اگر $x \neq y$ آن‌گاه از تبصره ۲ به دست

می‌آوریم

$$\omega_\lambda(x, y) = \omega_\lambda(Tx, Ty) < \omega_\lambda(x, y)$$

□ که این یک تناقض است، پس $x = y$. یعنی T یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد.

برای خود نگاشتهایی که ω -پیوسته نیستند قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار ω -کامل باشد به طوری که ω منظم است. همچنین فرض کنید T

یک خود نگاشت روی X_ω و $\alpha : X_\omega \times X_\omega \rightarrow [0, \infty)$ یک تابع باشد به طوری که شرایط زیر برقرار است:

(i) یک نگاشت α -پذیرفتنی مثلثی است،

(ii) یک نگاشت انقباضی $\omega - \alpha$ میسر-کیبلر است،

(iii) به ازای هر $x \in X$ ، $\lambda > 0$ ای وجود دارد به طوری که $\alpha(x, Tx) \geq 1$ و $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$.

(iv) اگر $(x_n)_{n \geq 1}$ یک دنباله در X_ω باشد به طوری که $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X_\omega$ آن گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha(x_n, x) \geq 1 \text{ داریم}$$

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به علاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $\alpha(x, y) \geq 1$ ، آن گاه نقطه ثابت منحصر به فرد است.

برهان: فرض کنید $x \in X$ ای وجود داشته باشد $\alpha(x, Tx) \geq 1$. همانند برهان قضیه ۱ دنباله پیکارد $\{x_n\}_{n \geq 0}$ را در نقطه آغازین x_0 طوری به دست می‌آوریم که $\omega - \omega$ کوشی باشد و به نقطه x^* همگرا باشد. همچنین برای هر $n < m$ به دست آوردیم $\alpha(x_n, x_m) \geq 1$. پس از (iv) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم، $\alpha(x_n, x^*) \geq 1$. در نتیجه بنابر تبصره ۲ داریم

$$\omega_\lambda(x_{n+1}, Tx^*) = \omega_\lambda(Tx_n, Tx^*) \leq \omega_\lambda(x_n, x^*)$$

پس می‌توان نوشت $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\lambda(x_{n+1}, Tx^*) = 0$. بنابراین

$$\omega_\lambda(x^*, Tx^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [\omega_\lambda(x^*, x_{n+1}) + \omega_\lambda(x_{n+1}, Tx^*)] = 0$$

پس $x^* = Tx^*$ چون ω منظم است. دیگر قسمت‌ها همانند برهان قضیه ۱ انجام می‌شوند. \square

مثال ۱. فرض کنید $X = \mathbb{R}$ به ازای هر $x, y \in X_\omega$ و هر $\lambda > 0$ به متر مدولار زیر مجهز شده باشد

$$\omega_\lambda(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} (|x| + |y|) & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

همچنین $T: X_\omega \rightarrow X_\omega$ و $\alpha: X_\omega \times X_\omega \rightarrow [0, \infty)$ را به صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \wedge y \in [0, 1] \\ \frac{1}{4} & x \vee y \notin [0, 1] \end{cases} \text{ و } Tx = \begin{cases} \sin x & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2} x^\wedge & x \in [0, 1] \\ \ln x + 1 & x \in (1, 2) \\ \frac{1}{4} x^\delta & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

اگر $\alpha(x, y) \geq 1$ آن گاه $x, y \in [0, 1]$. از طرف دیگر برای هر $w \in [0, 1]$ ، داریم $Tw \in [0, 1]$. یعنی $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ همچنین

اگر $\alpha(x, y) \geq 1$ و $\alpha(y, z) \geq 1$ آن گاه $x, y, z \in [0, 1]$. پس $\alpha(x, z) \geq 1$. در نتیجه T یک نگاشت α -پذیرفتنی مثلثی

است. اگر $(x_n)_{n \geq 1}$ یک دنباله در X_ω باشد به طوری که $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X_\omega$ آن گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha(x_n, x) \geq 1, \quad n \in \mathbb{N} \text{ پس برای هر } x \in [0, 1] \text{ این نتیجه می‌دهد}$$

به وضوح $\alpha(0, T0) \geq 1$ فرض کنید $\alpha(x, y) \geq 1$ و $\varepsilon < \omega_\lambda(x, y) < \varepsilon + \delta$ که در آن $\varepsilon, \delta > 0$. بنابراین

$$\frac{1}{\lambda} (|x| + |y|) < \varepsilon + \delta \text{ و } x, y \in [0, 1] \text{ پس داریم}$$

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) = \frac{1}{\lambda} (|Tx| + |Ty|) = \frac{1}{\lambda \lambda} (|x|^\wedge + |y|^\wedge) \leq \frac{1}{\lambda \lambda} (|x| + |y|) < \frac{1}{\lambda} (\varepsilon + \delta)$$

حال با قرار دادن $\delta \leq \frac{\gamma}{\lambda} \varepsilon$ شرط (۱) برقرار است. یعنی T یک نگاشت انقباضی $\omega - \alpha$ میسر-کیپلر است. بنابراین همه شرایط قضیه ۱ برقرار است و T یک نقطه ثابت دارد.

اگر در قضیه ۱ به ازای هر $x, y \in X_\omega$ قرار دهیم $\alpha(x, y) = 1$ ، آن‌گاه نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۱. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار ω -کامل باشد به طوری که ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X_ω است.

(i) به ازای هر $\lambda > 0$ ، $x_0 \in X$ ای وجود دارد به طوری که $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$.

(ii) اگر برای هر $x, y \in X_\omega$ و هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta(\varepsilon) > 0$ ای وجود داشته باشد که

$$\varepsilon \leq \omega_\lambda(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \omega_\lambda(Tx, Ty) < \varepsilon$$

در این صورت T یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد.

مثال ۲. فرض کنید $X = \square^2$ به متر مدولار زیر مجهز شده باشد

$$\omega_\lambda((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \frac{\lambda |a_1 - a_2|}{2e^\lambda} + \frac{|b_1 - b_2|}{e^\lambda}$$

به وضوح X_ω یک فضای متری مدولار ω -کامل است. همچنین نگاشت $T: X_\omega \rightarrow X_\omega$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$T(a, b) = \left(\frac{b}{2}, a \right).$$

حال با قرار دادن $\delta \leq \frac{1}{4} \varepsilon$ شرط (ii) از نتیجه ۱ برقرار است، یعنی T یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد (اینجا $x^* = (0, 0)$ نقطه ثابت T است).

حال اگر فضای متری کامل (\square^2, d) را در نظر بگیریم که $d((x, y), (u, v)) = |x - u| + |y - v|$ آن‌گاه نمی‌توان

برای قضیه میسر-کیپلر نقطه ثابت پیدا کرد. در حقیقت برای $\varepsilon = 1$ و هر $\delta > 0$ داریم

$$d((2, 0), (1, 0)) = 1 < \varepsilon + \delta$$

اما

$$d(T(2, 0), T(1, 0)) = d((1, 2), (0, 1)) = 1 \geq \varepsilon.$$

مثال ۳. فرض کنید مجموعه $X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \square, n \geq 2 \right\}$ به متر مدولار $\omega_\lambda(x, y) = \frac{|x - y|}{\lambda}$ مجهز شده باشد. به وضوح

X_ω یک فضای متری مدولار ω -کامل است. همچنین نگاشت $T: X_\omega \rightarrow X_\omega$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Tx = x^2.$$

به وضوح $\omega_\lambda(\frac{1}{4}, T(\frac{1}{4})) < \infty$. حال با قرار دادن $\delta \leq \frac{1}{4}\epsilon$ شرط (ii) از نتیجه ۱،۲، برقرار است، یعنی T یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد.

مثال ۴. فرض کنید مجموعه $X = \square$ به متر مدولار $\omega_\lambda(x, y) = \begin{cases} \infty & \lambda < |x - y| \\ 0 & \lambda \geq |x - y| \end{cases}$ مجهز شده باشد. به وضوح

X_ω یک فضای متری مدولار ω -کامل است. همچنین نگاشت $T: X_\omega \rightarrow X_\omega$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Tx = x + k$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد که شرایط نتیجه ۱ برقرار است و T یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد.

۳. نتایجی از نوع میبیر-کیبلر در فضاهای متری مدولاری که به یک گراف مجهز شده است

همانطور که در [۱۸] آورده شده است، فرض کنید (X_ω, ω) یک فضای متری مدولار باشد و قطر ضرب دکارتی $X_\omega \times X_\omega$ را با Δ مشخص شده باشد. گراف جهت‌دار G را در نظر بگیرید که $V(G)$ مشخص کننده رئوس و $E(G)$ مشخص کننده یال‌ها در مجموعه X_ω است، و همچنین $E(G)$ شامل همه گره‌ها می‌باشد. یعنی $\Delta \subseteq E(G)$. ما فرض می‌کنیم که $E(G)$ یال‌های موازی نداشته باشد. پس گراف G را با $(V(G), E(G))$ مشخص می‌کنیم. به‌علاوه ما گراف G را گراف وزن‌دار در نظر می‌گیریم (صفحه ۳۰۹ از [۱۹] را ببینید) که در آن برای به هر یال فاصله بین رئوس آن را به عنوان وزن اختصاص می‌دهیم. اگر x و y دو رأس در گراف G باشند، آن‌گاه یک گذر از x به y به طول $N \in \square$ دنباله $(x_i)_{i=1}^N$ از $N+1$ رأس است که $x_i = x$ ، $x_N = y$ و $(x_{i-1}, x_i) \in E(G)$ ، $(i=1, 2, \dots, N)$.

تعریف ۷. [۱۸] فرض کنید (X, d) یک فضای متری باشد که به گراف G مجهز است. گوئیم نگاشت $T: X \rightarrow X$ یک G -انقباضی باناخ یا ساده تر G -انقباضی است هرگاه T یال‌های G را حفظ کند، یعنی

$$(x, y) \in E(G) \Rightarrow (Tx, Ty) \in E(G)$$

و همچنین به ازای هر $\alpha \in (0, 1)$ ، $x, y \in X$ وجود داشته باشد به طوری که

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

تعریف ۸. [۱۸] فرض کنید $T: X \rightarrow X$ یک نگاشت باشد و $(x_i)_{i=1}^N$ یک دنباله دلخواهی باشد که به x همگرا است و

برای هر $n \in \square$ ، $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$. گوئیم T یک نگاشت G -پیوسته است هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx$.

در این فصل نشان خواهیم داد که با استفاده از نتایج ما، قضایای نقطه ثابت زیادی در فضای متری مدولار مجهز به

گراف G به آسانی به دست می‌آیند.

تعریف ۹. فرض کنید T یک خود نگاشت روی فضای متریک مدولار X_ω باشد که به گراف G مجهز است. گوئیم T یک نگاشت انقباضی $\omega - G$ میسر-کیبلر است هرگاه برای هر $x, y \in X_\omega$ و هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta(\varepsilon) > 0$ وجود داشته باشد که

$$\begin{cases} \varepsilon \leq \omega_\lambda(x, y) < \varepsilon + \delta \\ (x, y) \in E(G) \end{cases} \Rightarrow \omega_\lambda(Tx, Ty) < \varepsilon$$

قضیه ۳. فرض کنید X_ω یک فضای متریک مدولار ω -کامل باشد که به گراف G مجهز است و ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X_ω باشد به طوری که شرایط زیر برقرار می‌باشند:

- (i) به ازای هر $\lambda > 0$ ، $x \in X$ ای وجود دارد به طوری که $(x, Tx) \in E(G)$ و $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$
- (ii) T یک نگاشت ω -پوسته است،
- (iii) $(x, y) \in E(G) \Rightarrow (Tx, Ty) \in E(G)$
- (iv) $(x, z), (z, y) \in E(G) \Rightarrow (x, y) \in E(G)$
- (v) T یک نگاشت انقباضی $\omega - G$ میسر-کیبلر است.

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به علاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $(x, y) \in E(G)$ ، آن‌گاه نقطه ثابت منحصر به فرد است.

برهان: تابع $\alpha: X_\omega \times X_\omega \rightarrow [0, \infty)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر $(x, y) \in E(G)$ آن‌گاه $\alpha(x, y) = 2$ و در غیر این صورت $\alpha(x, y) = 0$. اگر $\alpha(x, y) \geq 1$ آن‌گاه $(x, y) \in E(G)$. از طرف دیگر از (iii) داریم $(Tx, Ty) \in E(G)$ یعنی $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$. همچنین اگر $\alpha(x, y) \geq 1$ و $\alpha(y, z) \geq 1$ آن‌گاه $(x, z), (z, y) \in E(G)$. پس از (iv) به دست می‌آوریم $\alpha(x, z) \geq 1$. در نتیجه T یک نگاشت α -پذیرفتنی مثلثی است. به آسانی از (i) به دست می‌آوریم $\alpha(x, Tx) \geq 1$.

فرض کنید $\alpha(x, y) \geq 1$ و $\varepsilon < \omega_\lambda(x, y) < \varepsilon + \delta$ که در آن $\varepsilon, \delta > 0$. بنابراین $(x, y) \in E(G)$ و $\varepsilon < \omega_\lambda(x, y) < \varepsilon + \delta$. بنابراین از (v) نتیجه می‌گیریم $\omega_\lambda(Tx, Ty) < \varepsilon$. پس ثابت کردیم T یک نگاشت انقباضی $\omega - \alpha$ میسر-کیبلر است. از این رو همه شرایط برقرار است و T یک نقطه ثابت دارد. همچنین اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $(x, y) \in E(G)$ ، آن‌گاه برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ خواهیم داشت $\alpha(x, y) \geq 1$ که در این مورد نقطه ثابت T منحصر به فرد است. \square

قضیه ۴. فرض کنید X_ω یک فضای متریک مدولار ω -کامل باشد که به گراف G مجهز است و ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X_ω باشد به طوری که شرایط زیر برقرار می‌باشند:

- (i) به ازای هر $\lambda > 0$ ، $x \in X$ ای وجود دارد به طوری که $(x, Tx) \in E(G)$ و $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$

$$(x, y) \in E(G) \Rightarrow (Tx, Ty) \in E(G) \quad (ii)$$

$$(x, z), (z, y) \in E(G) \Rightarrow (x, y) \in E(G) \quad (iii)$$

(iv) یک نگاشت انقباضی ω -میر-کیبلر است،

(iv) اگر $(x_n)_{n \geq 1}$ یک دنباله در X_ω باشد به طوری که $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X_\omega$ آن‌گاه برای هر

$$n \in \mathbb{N} \quad (x_n, x) \in E(G) \quad \square$$

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به علاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $(x, y) \in E(G)$ ، آن‌گاه نقطه ثابت منحصر به فرد است.

برهان: فرض کنید تابع $\alpha: X_\omega \times X_\omega \rightarrow [0, \infty)$ همان تابع در برهان قضیه ۳ باشد. همانند برهان قضیه ۳ می‌توانیم بررسی کنیم که شرایط (i) تا (iii) از قضیه ۲ برقرارند. اگر $(x_n)_{n \geq 1}$ یک دنباله در X_ω باشد به طوری که $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X_\omega$ آن‌گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ ، که از (iv) نتیجه می‌گیریم $(x_n, x) \in E(G)$. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\alpha(x_n, x) \geq 1$. بنابراین همه شرایط (i) تا (iv) از قضیه ۲ برقرارند. در نتیجه T یک نقطه ثابت دارد. همچنین اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $(x, y) \in E(G)$ ، آن‌گاه برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ خواهیم داشت $\alpha(x, y) \geq 1$ ، که در این مورد نقطه ثابت T منحصر به فرد است. \square

۴. نتایجی از نوع میر-کیبلر در فضاهای متریک مدولاری که به یک ترتیب جزئی مجهز شده‌اند

بررسی وجود نقاط ثابت در مجموعه‌های جزئی در [۲۰] انجام شد. اگر X_ω یک فضای متریک مدولار و (X_ω, \leq) یک مجموعه مرتب جزئی باشد، در آن صورت گوئیم X_ω یک فضای متریک مدولار مرتب جزئی است. دو عنصر x و y از X_ω را مقایسه‌پذیر گوئیم هرگاه $x \leq y$ یا $y \leq x$. نگاشت $T: X \rightarrow X$ را صعودی نامیم هرگاه $x \leq y$ نتیجه دهد $Tx \leq Ty$.

تعریف ۱۰. فرض کنید T یک خود نگاشت روی فضای متریک مدولار X_ω باشد که به ترتیب جزئی \leq مجهز است. گوئیم T یک نگاشت انقباضی ω -میر-کیبلر جزئی است هرگاه برای هر $x, y \in X_\omega$ و هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta(\varepsilon) > 0$ ای وجود داشته باشد که

$$\begin{cases} \varepsilon \leq \omega_\lambda(x, y) < \varepsilon + \delta \\ x \leq y \end{cases} \Rightarrow \omega_\lambda(Tx, Ty) < \varepsilon$$

قضیه ۵. فرض کنید X_ω یک فضای متریک مدولار ω -کامل باشد که به ترتیب جزئی \leq مجهز است و ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X_ω باشد به طوری که شرایط زیر برقرار می‌باشند:

(i) به ازای هر $\lambda > 0$ ، $x \in X$ ای وجود دارد به طوری که $x \leq Tx$ و $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$

(ii) T یک نگاشت ω -پوسته است،

(iii) T یک نگاشت صعودی است،

(iv) T یک نگاشت انقباضی ω -میسر-کیبلر جزئی است.

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به علاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $x \leq y$ ، آن گاه نقطه ثابت منحصر به فرد است.

برهان: تابع $\alpha: X_\omega \times X_\omega \rightarrow [0, \infty)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر $x \leq y$ آنگاه $\alpha(x, y) = 2$ و در غیر این صورت $\alpha(x, y) = 0$. اگر $\alpha(x, y) \geq 1$ آن گاه $x \leq y$. از طرف دیگر از (iii) داریم $Tx \leq Ty$. یعنی $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$. همچنین اگر $\alpha(x, y) \geq 1$ و $\alpha(y, z) \geq 1$ آن گاه $x \leq y$ و $y \leq z$. پس به دست می‌آوریم $\alpha(x, z) \geq 1$. در نتیجه T یک نگاشت α -پذیرفتنی مثلثی است. به آسانی از (i) به دست می‌آوریم $\alpha(x, Tx) \geq 1$.

فرض کنید $\alpha(x, y) \geq 1$ و $\varepsilon < \omega_\lambda(x, y) < \varepsilon + \delta$ که در آن $\varepsilon, \delta > 0$. بنابراین $x \leq y$ و $\varepsilon < \omega_\lambda(x, y) < \varepsilon + \delta$. بنابراین از (iv) نتیجه می‌گیریم $\omega_\lambda(Tx, Ty) < \varepsilon$. پس ثابت کردیم T یک نگاشت انقباضی $\omega - \alpha$ - میسر-کیبلر است. از این رو همه شرایط برقرار است و T یک نقطه ثابت دارد. همچنین اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $x \leq y$ ، آن گاه برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ خواهیم داشت $\alpha(x, y) \geq 1$ ، که در این مورد نقطه ثابت T منحصر به فرد است. \square

قضیه ۶. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار ω -کامل باشد که به ترتیب جزئی \leq مجهز است و ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X_ω باشد به طوری که شرایط زیر برقرار می‌باشند:

(i) به ازای هر $\lambda > 0$ ، $x \in X$ ای وجود دارد به طوری که $x \leq Tx$ و $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$

(ii) T یک نگاشت صعودی است،

(iii) T یک نگاشت انقباضی $\omega - G$ - میسر-کیبلر است،

(v) اگر $(x_n)_{n \geq 1}$ یک دنباله صعودی در X_ω باشد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X_\omega$ ، آن گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$x_n \leq x$$

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به علاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $x \leq y$ ، آن گاه نقطه ثابت منحصر به فرد است.

برهان: فرض کنید تابع $\alpha: X_\omega \times X_\omega \rightarrow [0, \infty)$ همان تابع در برهان قضیه ۵ باشد. همانند برهان قضیه ۵ می‌توانیم بررسی کنیم که شرایط (i) تا (iii) از قضیه ۲ برقرارند. اگر $(x_n)_{n \geq 1}$ یک دنباله صعودی در X_ω باشد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X_\omega$ ، آن گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $x_n \leq x_{n+1}$ ، که از (v) نتیجه می‌گیریم $x_n \leq x$. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\alpha(x_n, x) \geq 1$. بنابراین همه شرایط (i) تا (iv) از قضیه ۲ برقرارند. در نتیجه T یک نقطه ثابت دارد. همچنین

اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $x \leq y$ ، آن‌گاه برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ خواهیم داشت $\alpha(x, y) \geq 1$ ، که در این مورد نقطه ثابت T منحصر به فرد است. \square

۵. انقباضی‌هایی از نوع انتگرالی

فرض کنید Φ مجموعه همه نگاشت‌های $\phi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ که در شرایط زیر صدق می‌کنند.

(۱) هر $\phi \in \Phi$ روی زیر مجموعه‌های فشرده $[0, +\infty)$ تابع لبگ اندازه‌پذیر است،

$$(2) \text{ برای هر } \phi \in \Phi \text{ و هر } \varepsilon > 0, \text{ داریم } \int_0^\varepsilon \phi(\tau) d\tau > 0.$$

با روش مشابه با برهان قضایای قبل ما می‌توانیم نتایج زیر را به دست بیاوریم.

قضیه ۷. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار ω -کامل باشد به طوری که ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک

خود نگاشت روی X_ω و $\alpha: X_\omega \times X_\omega \rightarrow [0, \infty)$ یک تابع باشد به طوری که شرایط زیر برقرار است:

(i) یک نگاشت α -پذیرفتنی مثلثی است،

(ii) برای هر $x, y \in X_\omega$ و هر $\varepsilon > 0, \delta > 0$ وجود داشته باشد که

$$\begin{cases} \varepsilon \leq \int_0^{\omega_\lambda(x,y)} \phi(\tau) d\tau < \varepsilon + \delta \Rightarrow \int_0^{\omega_\lambda(Tx, Ty)} \phi(\tau) d\tau < \varepsilon \\ \alpha(x, y) \geq 1 \end{cases}$$

(iii) به ازای هر $\lambda > 0, x_0 \in X$ وجود دارد به طوری که $\alpha(x, Tx) \geq 1$ و $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$.

(iv) T یک نگاشت ω -پوسته است.

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به علاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $\alpha(x, y) \geq 1$ ، آن‌گاه نقطه ثابت منحصر به فرد است.

قضیه ۸. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار ω -کامل باشد به طوری که ω منظم است. همچنین فرض کنید T

یک خود نگاشت روی X_ω و $\alpha: X_\omega \times X_\omega \rightarrow [0, \infty)$ یک تابع باشد به طوری که شرایط زیر برقرار است:

(i) یک نگاشت α -پذیرفتنی مثلثی است،

(ii) برای هر $x, y \in X_\omega$ و هر $\varepsilon > 0, \delta > 0$ وجود داشته باشد که

$$\begin{cases} \varepsilon \leq \int_0^{\omega_\lambda(x,y)} \phi(\tau) d\tau < \varepsilon + \delta \Rightarrow \int_0^{\omega_\lambda(Tx, Ty)} \phi(\tau) d\tau < \varepsilon \\ \alpha(x, y) \geq 1 \end{cases}$$

(iii) به ازای هر $\lambda > 0$ ، $x \in X$ ای وجود دارد به طوری که $\alpha(x, Tx) \geq 1$ و $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$.

(iv) اگر $(x_n)_{n \geq 1}$ یک دنباله در X_ω باشد به طوری که $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X_\omega$ آن گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$

داریم $\alpha(x_n, x) \geq 1$.

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به علاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $\alpha(x, y) \geq 1$ ، آن گاه نقطه ثابت منحصر به فرد است.

قضیه ۹. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار ω -کامل باشد که به گراف G مجهز است و ω منظم است. همچنین

فرض کنید T یک خود نگاشت روی X_ω باشد به طوری که شرایط زیر برقرار می‌باشند:

(i) به ازای هر $\lambda > 0$ ، $x_0 \in X$ ای وجود دارد به طوری که $(x, Tx) \in E(G)$ و $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$ ،

(ii) یک نگاشت ω -پوسته است،

(iii) $(x, y) \in E(G) \Rightarrow (Tx, Ty) \in E(G)$

(iv) $(x, z), (z, y) \in E(G) \Rightarrow (x, y) \in E(G)$

(v) برای هر $x, y \in X_\omega$ و هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta(\varepsilon) > 0$ ای وجود داشته باشد که

$$\begin{cases} \varepsilon \leq \int_{\cdot}^{\omega_\lambda(x,y)} \phi(\tau) d\tau < \varepsilon + \delta \Rightarrow \int_{\cdot}^{\omega_\lambda(Tx,Ty)} \phi(\tau) d\tau < \varepsilon \\ (x, y) \in E(G) \end{cases}$$

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به علاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $(x, y) \in E(G)$ ، آن گاه نقطه ثابت منحصر به فرد است.

قضیه ۱۰. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار ω -کامل باشد که به گراف G مجهز است و ω منظم است.

همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X_ω باشد به طوری که شرایط زیر برقرار می‌باشند:

(i) به ازای هر $\lambda > 0$ ، $x \in X$ ای وجود دارد به طوری که $(x, Tx) \in E(G)$ و $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$ ،

(ii) $(x, y) \in E(G) \Rightarrow (Tx, Ty) \in E(G)$

(iii) $(x, z), (z, y) \in E(G) \Rightarrow (x, y) \in E(G)$

(iv) برای هر $x, y \in X_\omega$ و هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta(\varepsilon) > 0$ ای وجود داشته باشد که

$$\begin{cases} \varepsilon \leq \int_{\cdot}^{\omega_\lambda(x,y)} \phi(\tau) d\tau < \varepsilon + \delta \Rightarrow \int_{\cdot}^{\omega_\lambda(Tx,Ty)} \phi(\tau) d\tau < \varepsilon \\ (x, y) \in E(G) \end{cases}$$

(iv) اگر $(x_n)_{n \geq 1}$ یک دنباله در X_ω باشد به طوری که $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X_\omega$ آن‌گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $(x_n, x) \in E(G)$.

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به علاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $(x, y) \in E(G)$ ، آن‌گاه نقطه ثابت منحصر به فرد است.

قضیه ۱۱. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار ω -کامل باشد که به ترتیب جزئی \leq مجهز است و ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خودنگاشت روی X_ω باشد به طوری که شرایط زیر برقرار می‌باشند:

(i) به ازای هر $\lambda > 0$ ، $x_0 \in X$ ای وجود دارد به طوری که $x \leq Tx$ و $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$

(ii) T یک نگاشت ω -پوسته است،

(iii) T یک نگاشت صعودی است،

(iv) برای هر $x, y \in X_\omega$ و هر $\varepsilon > 0, \delta > 0$ ای وجود داشته باشد که

$$\begin{cases} \varepsilon \leq \int_{\cdot}^{\omega_\lambda(x,y)} \phi(\tau) d\tau < \varepsilon + \delta \\ x \leq y \end{cases} \Rightarrow \int_{\cdot}^{\omega_\lambda(Tx, Ty)} \phi(\tau) d\tau < \varepsilon$$

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به علاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $x \leq y$ ، آن‌گاه نقطه ثابت منحصر به فرد است.

قضیه ۱۲. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار ω -کامل باشد که به ترتیب جزئی \leq مجهز است و ω منظم است.

همچنین فرض کنید T یک خودنگاشت روی X_ω باشد به طوری که شرایط زیر برقرار می‌باشند:

(i) به ازای هر $\lambda > 0$ ، $x \in X$ ای وجود دارد به طوری که $x \leq Tx$ و $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$

(ii) T یک نگاشت صعودی است،

(iii) برای هر $x, y \in X_\omega$ و هر $\varepsilon > 0, \delta > 0$ ای وجود داشته باشد که

$$\begin{cases} \varepsilon \leq \int_{\cdot}^{\omega_\lambda(x,y)} \phi(\tau) d\tau < \varepsilon + \delta \\ x \leq y \end{cases} \Rightarrow \int_{\cdot}^{\omega_\lambda(Tx, Ty)} \phi(\tau) d\tau < \varepsilon$$

(iv) اگر $(x_n)_{n \geq 0}$ یک دنباله صعودی در X_ω باشد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X_\omega$ ، آن‌گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $x_n \leq x$.

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به علاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $x \leq y$ ، آن‌گاه نقطه ثابت منحصر به فرد است.

مراجع:

- [1] V.V. Chistyakov, Modular metric spaces, I: basic concepts, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72 (2010) 1-14.
- [2] V.V. Chistyakov, Modular metric spaces, II: application to superposition operators, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72 (2010) 15-30.
- [3] H. Nakano, *Modulared semi-ordered linear spaces*, Maruzen Co.1950.
- [4] J. Musielak, Orlicz spaces and modular spaces, *Lecture notes in Mathematics*, 1034 (1983) 1-216.
- [5] W. Orlicz, *Collected Papers, Parts I, II*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1988.
- [6] L. Diening, *Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids*, 2002.
- [7] P. Harjulehto, P. Hästö, M. Koskenoja, S. Varonen, The Dirichlet energy integral and variable exponent Sobolev spaces with zero boundary values, *Potential Analysis*, 25 (2006) 205-222.
- [8] J. Heinonen, T. Kilpelainen, O. Martio, "Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations," Clarendon, Oxford, 1993.
- [9] M.A. Khamsi, W. Kozłowski, S. Reich, Fixed point theory in modular function spaces, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 14 (1990) 935-953.
- [10] M.A. Khamsi, W.A. Kirk, *An introduction to metric spaces and fixed point theory*, John Wiley & Sons 2011.
- [11] W. Kozłowski, *Modular Function Spaces* .Series of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 122, Dekker, New York, 1988.
- [12] A. Meir, E. Keeler, A theorem on contraction mappings, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 28 (1969) 326-329.
- [13] J. Jachymski, Equivalent conditions and the Meir-Keeler type theorems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 194 (1995) 293-303
- [14] E. Karapnar, P. Kuman, P. Salimi, On--Meir-Keeler contractive mappings, *Fixed Point Theory Appl*, 94 (2013) 13.
- [15] S. Park ,Meir-Keeler type contractive conditions, *Math. Japonica*, 16 (1981) 13-20.
- [16] A.A. Abdou, M.A. Khamsi, On the fixed points of nonexpansive mappings in modular metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, 2013 (2013) 229.
- [17] B. Samet, C. Vetro, P .Vetro, Fixed point theorems for α - ψ -contractive type mappings,

Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 75 (2012) 2154-2165.

- [18] J. Jachymski, The contraction principle for mappings on a metric space with a graph, Proceedings of the American Mathematical Society, 136 (2008) 1359-1373.
- [19] R. Johnsonbaugh, Discrete Mathematics (Fourth Edition), Upper Saddle River. NJ: Prentice Hall, (1997) 257-280.
- [20] A.C. Ran, M.C. Reurings, A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations, Proceedings of the American Mathematical Society, (2004) 1435-1443.