سیستم‌های مختلط و غیرخطی
دوره ۱، شماره ۱ (بهار و تابستان ۱۳۹۶) صص ۱۳ تا ۲۷

نقاط ثابت مشترک در فضاهای متریک احتمالی منجر

راضیه فرخزاد رستمی [۱]

استادیار ریاضی، دانشگاه گنبد کاووس

چکیده: قضیه نقطه ثابت نگاشت های چند مقداری ناگسترده تکنیک هایی برای حل مسئله های کاربردی گوناگونی در علوم ریاضی و مهندسی ارائه می‌دهد. هدف از این پروژه اثبات وجود نقطه های منطبق، زوج نقطه ها و زوج نقطه های ثابت مشترک نگاشت های چند مقداری با شرایط ناگستردگی می‌باشد که شامل نگاشت های پیوسته و ناپیوسته روی فضاهای متریک احتمالی منجر می‌شود.

کلمات کلیدی: فضای متریک احتمالی منجر؛ زوج نقطه؛ نقطه منطبق؛ زوج نقطه ثابت مشترک؛ پیوستگی دوجانبه؛ پیوستگی دوجانبه ضعیف.

۱. سرآغاز

قضیه‌ی نقطه ثابت نقش مهمی در کاربردهای تعداد زیادی از شاخه‌های ریاضی بازی می‌کند. اصطلاح قضیه‌ی نقطه ثابت متریک به آن دسته از نتایج نظری نقطه ثابتی اشاره دارد که در شرایط هندسی روی فضاهای اساسی و نگاشت‌ها یک نقش حیاتی دارند. در سال ۱۹۲۲، باناخ [۲] یک ریاضیدان لهستانی [۱]، یک نتیجه خیلی مهم در مورد نگاشت‌های انقباضی ثابت کرد که به عنوان اصل انقباضی باناخ شناخته شده است. این قضیه تکنیکی برای حل مسائل کاربردی گوناگونی در علوم ریاضی و مهندسی می‌باشد. سپس تعداد زیادی از نویسندگان اصل انقباضی باناخ را تعمیم و به روش‌های مختلفی ادامه دادند.

---

[۱] رایانامه: razieh.farokhzad@yahoo.com
تاریخ دریافت: اردیبهشت ۱۳۹۶؛ تاریخ پذیرش: تیر ۱۳۹۶
[۲] Banach

در سال ۱۹۷۲ سگال[3] و بارکا-رید[4] [۱۶] اصل انقباضی باناخ از نوع احتمالی را ثابت کردند. در سال ۲۰۱۰ اصل نقطه ثابت باناخ از نوع احتمالی برای انقباضی‌های غیر خطی توسط جیسک جاچیمسکی[5] [۶] ثابت شده است. همچنین قضیه نقطه ثابت در فضای متریک احتمالی برای نگاشت‌های انقباضی دیگر توسط بسیاری از ریاضیدانان بررسی شده است که می‌توان در [۲،۴،۵،۱۴،۱۵] به آنها رجوع کرد.

در این اینجا ما سعی داریم قضایای فضای متریک را به فضای متریک احتمالی منجر[6] تعمیم و بعضی از قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های تک مقداری از نوع ناگسترده را ثابت کنیم. ابتدا بعضی از تعاریف و نتایج اصلی در فضاهای متریک احتمالی که در این تحقیق به کار می‌بریم را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱. ([۵]) تابع $f:(-\infty,+\infty)\rightarrow[0,1]$ یک تابع توزیعی نامیده می‌شود هرگاه یک تابع نانزولی و از چپ پیوسته با $inf_{x\in\mathbb{R}}f(x)=0$ باشد. به‌علاوه اگر $f(0)=0$ آن‌گاه f یک تابع توزیعی فاصله نامیده می‌شود. همچنین یک تابع توزیعی فاصله که $\lim_{t\rightarrow\infty}f(t)=1$ یک تابع توزیعی فاصله منجر گفته می‌شود. مجموعه‌ی همه توابع توزیعی فاصله را با Λ^{+} نشان می‌دهیم.

تعریف ۲. ([۵]) یک نرم سه گانه Δ (بطور خلاصه T-نرم)، یک عملگر دوتایی روی $[0,1]$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) Δ شرکت پذیر و جابجاپذیر باشد،

۲) Δ پیوسته باشد،

۳) برای همه $a\in[0,1]$، $\Delta(a,1)=a$،

۴) برای همه $a,b,c,d\in[0,1]$ به‌طوری‌که $a\leq c$ و $b\leq d$، $\Delta(a,b)\leq\Delta(c,d)$.

برای مثال $\Delta_p(a,b)=ab$ یک T-نرم می‌باشد.

در بین همه مثال‌های مهم T-نرم قابل ذکر است که $\Delta_m(a,b)=min\{a,b\}$ قوی‌ترین T-نرم می‌باشد.

تعریف ۳. ([۴]) یک نرم سه گانه Δ، از نوع H گفته می‌شود هرگاه خانواده‌ی توابع $\{\Delta^n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$ در $t=1$ هم‌پیوسته باشند که $\Delta^n:[0,1]\rightarrow[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta^1(t)=\Delta(t,t),\quad \Delta^n(t)=\Delta(t,\Delta^{n-1}(t)),\ n=2,3,\ldots$$

به عبارت دیگر

---

[3] Sehgal
[4] Bharucha-Reid
[5] Jacek Jachymski
[6] Menger

$$\forall \varepsilon \in (0,1), \exists \delta \in (0,1): \quad t > 1-\delta \Rightarrow \ \Delta^n(t) > 1-\varepsilon, \ (n \geq 1)$$

بدیهی است که برای همه‌ی $n \in \mathbb{N}$ و $t \in [0,1]$، $\Delta^n(t) \leq t$.

تعریف ۴. ([۱۵]) به سه تایی (X,F,Δ) که X یک مجموعه‌ی ناتهی ، Δ یک T–نرم پیوسته و F یک نگاشت از $X \times X$ به توی Λ^+ است، فضای متریک احتمالی منجر (بطور خلاصه فضای PM منجر) گفته می‌شود هرگاه با فرض اینکه $F_{p,q}$ مقدار F را در (p,q) نشان دهد، در شرایط زیر صدق کند:

- (PM_1) برای همه $t > 0$ و $p,q \in X$، $F_{p,q}(t) = 1$ اگر و تنها اگر $p = q$.
- (PM_2) برای همه $t > 0$ و $p,q \in X$، $F_{p,q}(t) = F_{q,p}(t)$.
- (PM_3) برای همه $t,s > 0$ و $p,q,r \in X$، $F_{p,r}(s+t) \geq \Delta\left(F_{p,q}(s), F_{q,r}(t)\right)$.

تعریف ۵. ([۱۵]) یک دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای PM منجر X همگرا به نقطه x در X گفته می‌شود ($x_n \to x$)، هرگاه برای هر $\delta > 0$ و $\lambda \in (0,1)$، یک عدد صحیح $N(\delta,\lambda) > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای همه $n \geq N(\delta,\lambda)$، $F_{x_n x} > 1 - \lambda$. به یک دنباله، دنباله کوشی گفته می‌شود هرگاه برای هر $\delta > 0$ و $\lambda \in (0,1)$ ، عدد صحیح $N(\delta,\lambda) > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای همه $n,m \geq N(\delta,\lambda)$ ، $F_{x_n,x_m} > 1-\lambda$. یک فضای PM منجر (X,F,Δ) کامل گفته می‌شود هرگاه هر دنباله کوشی در X به یک نقطه در X همگرا باشد.

فرض می‌کنیم Φ مجموعه‌ی همه‌ی توابع $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ باشد که برای هر $t > 0$، در شرایط $\varphi(t) < t$ و $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0$ صدق می‌کند.

لم ۱. ([۸]) فرض کنید (X,F,Δ) یک فضای PM منجر و $\varphi \in \Phi$ باشد. اگر برای هر $t > 0$، $F_{p,q}(\varphi(t)) = F_{p,q}(t)$، آنگاه $p = q$.

لم ۲. ([۸]) فرض کنید $n \geq 1$. اگر $g_1, g_2, \ldots, g_n : \mathbb{R} \to [0,1], F \in \Lambda^+$ و برای یک $\varphi \in \Phi$ داشته باشیم:

$$F(\varphi(t)) \geq min\{g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t), F(t)\},\ t > 0,$$

آن‌گاه برای همه $t > 0$ ، $F(\varphi(t)) \geq min\{g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)\}$.

برای $\tilde{a} = (x,y), \tilde{b} = (u,v) \in X^2$ ، یک تابع توزیعی $\tilde{F}$ از X^2 بتوی Λ^+ معرفی می‌کنیم که برای هر $t > 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{F}_{\tilde{a},\tilde{b}}(t) = min\{F_{x,u}(t), F_{y,v}(t)\}.$$

لم ۳. ([۸]) اگر (X,F,Δ) یک فضای کامل PM منجر باشد، آنگاه $(X^2,\tilde{F},\Delta)$ یک فضای کامل PM منجر می‌باشد.

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. یک نگاشت $T: X \to X$ ناگسترده گفته می‌شود هرگاه برای همه $x, y \in X$ ، $d(Tx, Ty) \le d(x, y)$. سیریک[۷] [۳] خود نگاشت‌های T روی X ناگسترده را بررسی و ثابت کرد که بعضی از قضایای نقطه ثابت برای چنین نگاشت‌هایی برقرار است.

در سال ۲۰۱۶ جاد[۸] به همراه همکارش [۷] مطالعه روی کلاسی از نگاشت‌های با شرط نوع ناگستردگی که شامل دو شرط پیوستگی و ناپیوستگی به همراه پیوستگی دوجانبه ضعیف را تعمیم دادند.

در این مقاله، ما شرط نوع ناگستردگی زیر را روی کلاس دو خودنگاشت f,T روی فضای PM منجر (X,F,Δ) با شرط پیوستگی و پیوستگی دوجانبه ضعیف به کار می‌بریم:

$$F_{Tx,Ty}\left(\varphi(t)\right) \ge a(x,y)F_{fx,fy}(t) + b(x,y)\min\left\{F_{fx,Tx}(t), F_{fy,Ty}(t)\right\} + c(x,y)\min\left\{F_{fx,fy}(t), F_{fx,Tx}(t), F_{fy,Ty}(t)\right\} \qquad (۱)$$

که $a(x,y), b(x,y), c(x,y) > ۰$ به‌طوری‌که $\inf_{x,y\in X}\left(a(x,y)+b(x,y)+c(x,y)\right)=۱$.

تعریف ۶. فرض کنید f و g دو نگاشت از X بتوی Y باشند. می‌گوییم f و g نقطه منطبق دارند هرگاه یک نقطه x در X وجود داشته باشد به‌طوری‌که $fx = gx$.

تعریف ۱۰. فرض کنید f و g دو خودنگاشت روی X باشند. گوییم $x \in X$ یک نقطه ثابت مشترک f و g است هرگاه $fx = gx = x$.

تعریف ۷. اگر S و T دو نگاشت از فضای متریک (X,d) بتوی خودش باشند، آن‌ها را همساز روی X می‌نامند هرگاه برای دنباله $\{x_m\}$ و نقطه x در X ،

$$\lim_{m\to\infty} Sx_m = \lim_{m\to\infty} Tx_m = x.$$

واضح است که اگر S و T همساز روی X باشند و برای $x \in X$، $d(Sx, Tx) = ۰$، آن‌گاه $d(STx, TSx) = ۰$.

در سال ۱۹۸۲، سیسا[۹] [۱۷] مفهوم شرط جابجایی ضعیف را برای یک جفت از نگاشت‌های تک مقداری معرفی کرد. کمی بعد، جانک[۱۰] [۹] مفهوم جابجایی ضعیف را با معرفی عبارت همسازی نگاشت‌ها تعمیم داد. پانت[۱۱] [۱۰] مفهوم $R-$جابجایی ضعیف نگاشت‌ها را برای نگاشت‌های ناهمساز معرفی کرده است.

---

[۷] Ćirić
[۸] Jhade
[۹] Sessa
[۱۰] Jungek
[۱۱] Pant

دو خودنگاشت f و g از یک فضای متریک (X,d)، $R-$جابجایی ضعیف از نوع A_g نامیده می‌شود [۱۳] هرگاه عدد حقیقی مثبت R وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای همه $x \in X$، $d(ffx,gfx) \leq Rd(fx,gx)$. به‌طور مشابه، دو خودنگاشت f و g از فضای متریک (X,d)، $R-$جابجایی ضعیف از نوع A_f نامیده می‌شود [۱۳] هرگاه عدد حقیقی مثبت R وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای همه $x \in X$، $d(fgx,ggx) \leq Rd(fx,gx)$.

حال ما مفهوم شرط جابجایی ضعیف را برای یک جفت از نگاشت‌های تک مقداری در یک فضای PM منجر (X,F,Δ) همانند [۷] معرفی می‌کنیم.

تعریف ۸. دو خودنگاشت f و g از فضای PM منجر (X,F,Δ)، $R-$ جابجایی ضعیف از نوع (MA_g) نامیده می‌شود هرگاه عدد حقیقی مثبت $R \geq ۱$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای همه $t > ۰$ و $x \in X$،

$$F_{ffx,gfx}(t) \geq RF_{fx,gx}(t).$$

در سال ۱۹۹۸، پانت [۱۱] مفهوم پیوستگی دوجانبه را برای جفت نگاشت‌های تک مقداری معرفی کرده است. در ادامه، ما تعریف مشابه آن ولی در یک فضای PM منجر X داریم.

تعریف ۹. دو خودنگاشت f و g از فضای PM منجر X پیوسته دوجانبه هستند هرگاه $\lim_{n\to\infty} gfx_n = gx$ و $\lim_{n\to\infty} fgx_n = fx$، که $\{x_n\}$ یک دنباله در X می‌باشد به‌طوری‌که برای یک $x \in X$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = x$.

توجه کنید که یک جفت از نگاشت‌هایی که پیوسته دوجانبه هستند لزوماً پیوسته نمی‌باشند حتی در نقطه ثابت مشترکشان (برای مثال رجوع کنید به [۱۱]).

اخیراً، پانت به همراه همکارانش [۱۲] پیوستگی دوجانبه را با معرفی مفهوم پیوستگی دوجانبه ضعیف برای جفت نگاشت‌های تک مقداری مشابه تعریف زیر ولی در فضای متریک (X,d) تعمیم داده اند.

تعریف ۱۰. دو خودنگاشت f و g از فضای PM منجر X پیوسته دوجانبه ضعیف می‌باشند هرگاه $\lim_{n\to\infty} gfx_n = gx$ یا $\lim_{n\to\infty} fgx_n = fx$، که $\{x_n\}$ یک دنباله در X می‌باشد به‌طوری‌که برای یک $x \in X$، $\lim_{n\to\infty} fgx_n = \lim_{n\to\infty} gfx_n = x$.

قابل توجه است که پیوستگی دوجانبه، پیوستگی دوجانبه ضعیف را نتیجه می‌دهد اما همان‌طور که در مثال زیر نشان داده شده است، عکس آن برقرار نیست.

مثال ۱. ([۷]) فرض کنید $X = [۲,۲۰]$ و d یک متر معمولی روی X باشد. $f,g: X \to X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} ۲, & x=۲ \text{ و } x>۵ \\ ۶, & ۲<x\leq ۵ \end{cases}$$

و

$$g(x)=\begin{cases} ۲, & x=۲ \\ ۱۱, & ۲<x\leq ۵ \\ \dfrac{x+۱}{۳}, & x>۵ \end{cases}$$

تابع‌های H و D تعریف شده در زیر تابع‌های توزیعی منجر می‌باشند:

$$H(x)=\begin{cases} ۰, & t\leq ۰ \\ ۱, & t>۰ \end{cases}$$

و

$$D(x)=\begin{cases} ۰, & t\leq ۰ \\ ۱-e^{-t}, & t>۰ \end{cases}$$

برای هر $t>۰$ ، تابع $F: X\times X\to \Lambda^{+}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_{x,y}(t)=\begin{cases} \mathrm{H(t)}, & x=y \\ \mathrm{D}\left(\dfrac{t}{d\left(x,y\right)}\right), & x\neq y \end{cases}$$

قرار می‌دهیم $\Delta(a,b)=min\{a,b\}$. آن‌گاه $\left(\mathrm{X,F,\Delta}\right)$ یک فضای PM منجر می‌شود. واضح است که f و g پیوسته دوجانبه ضعیف روی $\left(\mathrm{X,F,\Delta}\right)$ می‌باشند، اما پیوسته دوجانبه نیستند. قابل ذکر است که پیوستگی دوجانبه ضعیف به تنهایی وجود نقطه ثابت مشترک و یا حتی نقطه منطبق را تضمین نمی‌کند (به [۷] از مثال بالا روی فضای PM منجر رجوع کنید).

۲. نقطه ثابت مشترک

تعریف ۱۱. فرض کنید f و g دو خودنگاشت روی فضای PM منجر $\left(\mathrm{X,F,\Delta}\right)$ باشند. آن‌گاه f و g همساز منجر گفته می‌شوند هرگاه برای هر $t>۰$، $\lim_{n\to\infty} F_{fgx_n,gfx_n}(t)=۱$ که $\{x_n\}$ یک دنباله می‌باشد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} fx_n=\lim_{n\to\infty} gx_n=x\in X$.

قضیه ۱. فرض کنید (X,F,Δ) یک فضای PM منجر کامل با T–نرم Δ از نوع H باشد و T,f دو خودنگاشت پیوسته دوجانبه ضعیف روی X باشند که در معادله (۱) برای یک $\varphi \in \Phi$ با $T(X) \subseteq f(X)$ صدق می‌کنند. آن‌گاه T و f نقطه ثابت مشترک در X دارند اگر

آ) T و f همساز منجر باشند یا

ب) T و f R– جابجایی ضعیف از نوع (MA_f) باشند یا

پ) T و f R– جابجایی ضعیف از نوع (MA_T) باشند.

برهان: فرض کنید $x_0 \in X$. چون $T(X) \subseteq f(X)$، x_1 را طوری انتخاب می‌کنیم که $y_1 = fx_1 = Tx_0$. در حالت کلی x_{n+1} ها را به همین صورت انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که $y_{n+1} = fx_{n+1} = Tx_n$. از معادله (۱) داریم:

$$\begin{aligned} F_{Tx_n,Tx_{n+1}}(\varphi(t)) \geq\ & a\, F_{fx_n,fx_{n+1}}(t) + b \min\{F_{fx_n,Tx_n}(t), F_{fx_{n+1},Tx_{n+1}}(t)\} \\ & + c \min\{F_{fx_n,fx_{n+1}}(t), F_{fx_n,Tx_n}(t), F_{fx_{n+1},Tx_{n+1}}(t)\} \\ \geq\ & a\, F_{fx_n,Tx_n}(t) + b \min\{F_{fx_n,Tx_n}(t), F_{fx_{n+1},Tx_{n+1}}(t)\} \\ & + c \min\{F_{fx_n,Tx_n}(t), F_{fx_n,Tx_n}(t), F_{fx_{n+1},Tx_{n+1}}(t)\}, \end{aligned}$$

که a,b,c با توجه به (x_n, x_{n+1}) ارزش‌گذاری می‌شوند. فرض کنید برای یک n، $t > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که $F_{fx_{n+1},Tx_{n+1}}(t) < F_{fx_n,Tx_n}(t)$. آن‌گاه با توجه به معادله بالا داریم:

$$\begin{aligned} F_{Tx_n,Tx_{n+1}}(\varphi(t)) \geq\ & aF_{fx_n,Tx_n}(t) + (b+c)F_{fx_{n+1},Tx_{n+1}}(t) \\ >\ & (a+b+c)F_{fx_{n+1},Tx_{n+1}}(t) \geq F_{Tx_n,Tx_{n+1}}(t), \end{aligned}$$

که یک تناقض است، چون برای هر $t > 0$, $\varphi(t) < t$. بنابراین, برای همه nها داریم:

$$F_{fx_{n+1},Tx_{n+1}}(t) \geq F_{fx_n,Tx_n}(t), \quad t > 0 \tag{۲}$$

همچنین با توجه به نامساوی (۱) نتیجه می‌شود که:

$$F_{y_{n+1},y_{n+2}}(\varphi(t)) \geq (a+b+c) \min\{F_{y_n,y_{n+1}}(t), F_{y_{n+1},y_{n+2}}(t)\}.$$

از اینکه $\varphi \in \Phi$ و لم ۲، برای هر $t > 0$ داریم:

$$F_{y_{n+1},y_{n+2}}(\varphi(t)) \geq (a+b+c)\, F_{y_n,y_{n+1}}(t) \geq F_{y_n,y_{n+1}}(t).$$

بنابراین برای هر $t > 0$،

$$F_{y_{n+1},y_{n+2}}(\varphi^{n+1}(t)) \geq F_{y_0,y_1}(t).$$

برای $\delta > ۰$ و $\varepsilon \in (۰,۱)$، چون $\lim_{n\to\infty} F_{y_۰,y_۱}(t) = ۱$ ، یک $t_۰$ وجود دارد به‌طوری‌که $F_{y_۰,y_۱}(t_۰) > ۱ - \varepsilon$. همچنین با $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t_۰) = ۰$، یک $N_۰$ وجود دارد به‌طوری‌که برای $n \geq N_۰$ ، $\varphi^n(t_۰) < \delta$. بنابراین برای $N > ۰$ به‌دست می‌آوریم:

$$F_{y_{n+۱},y_{n+۲}}(\delta) \geq F_{y_{n+۱},y_{n+۲}}(\varphi^{n+۱}(t_۰)) \geq F_{y_۰,y_۱}(t_۰) > ۱ - \varepsilon.$$

به عبارت دیگر، برای همه $t > ۰$ ، $\lim_{n\to\infty} F_{y_{n+۱},y_{n+۲}}(t) = ۱$.

حال باید ثابت کنیم که دنباله $\{y_n\}$ یک دنباله کوشی در X است. برای اثبات آن کافیست ثابت کنیم که برای هر $\delta > ۰$ و $\varphi \in (۰,۱)$، یک $N(\varepsilon,\delta)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای همه $m > n \geq N(\varepsilon,\delta)$،

$F_{y_n,y_m}(\delta) > ۱ - \varepsilon$.

برای انجام آن، ابتدا می‌توان نامساوی زیر را برای همه $k \geq ۱$ با استقرای ریاضی ثابت کرد:

$$F_{y_{n+k},y_n}(\delta) \geq \Delta^k(F_{y_{n+۱},y_n}(\delta - \varphi(\delta))). \qquad (۳)$$

اگر $k = ۱$،

$$\begin{aligned} F_{y_{n+۱},y_n}(\delta) &\geq F_{y_{n+۱},y_n}(\delta - \varphi(\delta)) = \Delta(F_{y_{n+۱},y_n}(\delta - \varphi(\delta)), ۱) \\ &\geq \Delta(F_{y_{n+۱},y_n}(\delta - \varphi(\delta)), F_{y_{n+۱},y_n}(\delta - \varphi(\delta))) \\ &= \Delta^۱(F_{y_{n+۱},y_n}(\delta - \varphi(\delta))). \end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم (۳) برای $۱ \leq k \leq p$ برقرار است. برای $k = p + ۱$ داریم

$$F_{y_{n+p+۱},y_n}(\delta) \geq \Delta(F_{y_{n+۱},y_n}(\delta - \varphi(\delta)), F_{y_{n+۱},y_{n+p+۱}}(\varphi(\delta))).$$

با توجه به معادله (۲)، نامساوی $F_{y_{n+p+۱},y_{n+p+۲}}(\delta) \geq F_{y_n,y_{n+۱}}(\delta)$ برای همه nها برقرار است. آن‌گاه

$$\begin{aligned} F_{y_{n+۱},y_{n+p+۱}}(\varphi(\delta)) &= F_{Tx_n,Tx_{n+p}}(\varphi(\delta)) \\ &\geq a\, F_{fx_n,fx_{n+p}}(\delta) + b\, min\{F_{fx_n,Tx_n}(\delta), F_{fx_{n+p},Tx_{n+p}}\}(\delta)\} \\ &\quad + c\, min\{F_{fx_n,fx_{n+p}}(\delta), F_{fx_n,Tx_n}(\delta), F_{fx_{n+p},Tx_{n+p}}(\delta)\} \\ &= a\, F_{y_n,y_{n+p}}(\delta) + b\, min\{F_{y_n,y_{n+۱}}(\delta), F_{y_{n+p},y_{n+p+۱}}(\delta)\} \\ &\quad + c\, min\{F_{y_n,y_{n+p}}(\delta), F_{y_n,y_{n+۱}}(\delta), F_{y_{n+p},y_{n+p+۱}}(\delta)\} \\ &\geq a\, \Delta^p(F_{y_n,y_{n+p}}(\delta - \varphi(\delta)) + b\, F_{y_n,y_{n+۱}}(\delta - \varphi(\delta)) \\ &\quad + c\, min\{\Delta^p(F_{y_n,y_{n+۱}}(\delta - \varphi(\delta)), F_{y_n,y_{n+۱}}(\delta - \varphi(\delta))\} \end{aligned}$$

$$\geq (a+b+c)\Delta^p(F_{y_n,y_{n+1}}(\delta-\varphi(\delta))$$
$$\geq \Delta^p(F_{y_n,y_{n+1}}(\delta-\varphi(\delta)).$$

درنتیجه

$$F_{y_n,y_{n+p+1}}(\delta) \geq \Delta(F_{y_n,y_{n+1}}(\delta-\varphi(\delta)), F_{y_{n+1},y_{n+p+1}}(\varphi(\delta))$$
$$\geq \Delta(F_{y_n,y_{n+1}}(\delta-\varphi(\delta)), \Delta^p(F_{y_n,y_{n+1}}(\delta-\varphi(\delta))$$
$$= \Delta^{p+1}(F_{y_n,y_{n+1}}(\delta-\varphi(\delta)).$$

بنابراین برای همه $k \geq 1$,

$$F_{y_{n+k},y_n}(\delta) \geq \Delta^k(F_{y_{n+1},y_n}(\delta-\varphi(\delta))).$$

با توجه به T–نرم بودن Δ از نوع H، برای یک $\varepsilon \in (0,1)$ یک $\lambda \in (0,1)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای همه $n \geq 1$ و $t > 1-\lambda$، $\Delta^n(t) > 1-\varepsilon$. از طرف دیگر طبق $\lim_{n\to\infty} F_{y_n,y_{n+1}}(\delta-\varphi(\delta)) = 1$، یک $N_1(\varepsilon,\delta)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای همه $n > N_1(\varepsilon,\delta)$،

$$F_{y_n,y_{n+1}}(\delta-\varphi(\delta)) > 1-\lambda.$$

بنابراین برای همه $k \geq 1$ و $n > N_1(\varepsilon,\delta)$،

$$F_{y_n,y_{n+1}}(\delta) > 1-\varepsilon.$$

در نتیجه دنباله $\{y_n\}$ یک دنباله کوشی در X می‌باشد. پس $\{fx_n\}$ و $\{Tx_n\}$ دنباله کوشی در X می‌باشند و از کامل بودن فضا نتیجه می‌شود که برای $p \in T$، $\lim_{n\to\infty} fx_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = p$. چون f و T پیوسته دوجانبه ضعیف هستند، پس داریم $\lim_{n\to\infty} fTx_n = fp$ یا $\lim_{n\to\infty} Tfx_n = Tp$.

حال نتیجه را در سه حالت فرض قضیه ثابت می‌کنیم.

آ) فرض می‌کنیم $\lim_{n\to\infty} f\,Tx_n = fp$. با استفاده از همسازی منجر f و T، برای همه $t > 0$ به‌دست می‌آوریم $\lim_{n\to\infty} F_{fTx_n,Tfx_n}(t) = 1$. برای $\delta > 0$ داریم

$$1 \geq F_{Tfx_n,fp}(\delta) \geq \Delta(F_{Tfx_n,fTx_n}(\varphi(\delta)), F_{fTx_n,fp}(\delta-\varphi(\delta)).$$

از فرض $n \to \infty$ نتیجه می‌شود $\lim_{n\to\infty} T\,fx_n = fp$ و $Tfx_{n+1} = TTx_n \to fp$. حال بنا به معادله (۲)،

$$F_{Tp,TTx_n}(\varphi(t)) \geq a\,F_{fp,fTx_n}(t) + b\,min\{F_{fp,Tp}(t), F_{fTx_n,TTx_n}(t)\}$$
$$+ c\,\min\{F_{fp,fTx_n}(t), F_{fp,Tp}(t), F_{fTx_n,TTx_n}(t)\}.$$

اگر $n \to \infty$، نتیجه می‌شود:

$$F_{Tp,fp}(\varphi(t)) \geq a \; + \; (b+c)F_{fp,Tp}(t) \geq F_{fp,Tp}(t).$$

بنابراین $fp = Tp$.

چون $\lim_{n\to\infty} TTx_n = \lim_{n\to\infty} fTx_n = fp$، با همان روش، از همسازی منجر f و T، جابجایی آن‌ها در نقطه منطبق به‌دست می‌آید. بنابراین $fTp = Tfp = ffp = TTp$. حال با استفاده از معادله (۲) داریم:

$$\begin{aligned} F_{Tp,TTp}(\varphi(t)) \geq \; & a\,F_{fp,fTp}(t) \; + \; b\,min\,\{F_{fp,Tp}(t), F_{fTp,TTp}(t)\} \\ & + c\,min\{\,F_{fp,fTp}(t), F_{fp,Tp}(t), F_{fTp,TTp}(t)\} \\ & = (a+c)F_{fp,fTp}(t) + \; b \geq (a+b+c)F_{fp,fTp}(t) \\ & \geq \; F_{fp,fTp}(t). \end{aligned}$$

در نتیجه $Tp = TTp = fTp$. به عبارت دیگر Tp یک نقطه ثابت مشترک f و T می‌باشد.

حال فرض می‌کنیم $\lim_{n\to\infty} T\,fx_n = Tp$. چون $T(X) \subseteq f(X)$ ، برای یک $z \in X$ نتیجه می‌شود که $Tp = fz$ و $\lim_{n\to\infty} T\,fx_n = fz$. از همسازی منجر f و T، $\lim_{n\to\infty} f\,Tx_n = fz$ به‌دست می‌آید. چون $Tfx_{n+1} = TTx_n$ و $Tfx_{n+1} \to fz$، پس $TTx_n \to fz$.

بنا به معادله (۲)،

$$\begin{aligned} F_{Tz,TTx_n}(\varphi(t)) \geq a\,F_{fz,fTx_n}(t) \; + \; b\,min\,\{F_{fz,Tz}(t), F_{fTx_{\{n\}},TTx_{\{n\}}}(t)\} \\ + c\,min\{\,F_{fz,fTx_n}(t), F_{fz,Tz}(t), F_{fTx_n,TTx_n}(t)\}. \end{aligned}$$

با فرض $n \to \infty$ نتیجه می‌گیریم:

$$F_{Tz,fz}(\varphi(t)) \geq \; a + (b+c)\,F_{fz,Tz}(t) \geq (a+b+c)F_{fz,Tz}(t),$$

و بنابراین $fz = Tz$. با همین روش، از همسازی منجر f و T جابجایی آنها در نقطه انطباق به‌دست می‌آید و در نتیجه $fTz = Tfz = TTz = ffz$.

مجدداً از معادله (۲) داریم:

$$\begin{aligned} F_{Tz,TTz}(\varphi(t)) \geq \; & a\,F_{fz,fTz}(t) \; + \; b\,min\,\{F_{fz,Tz}(t), F_{fTz,TTz}(t)\} \\ & + c\,min\{\,F_{fz,fTz}(t), F_{fz,Tz}(t), F_{fTz,TTz}(t)\} \end{aligned}$$

$$= (a+c)F_{fz,fTz}(t) + b \geq (a+b+c)F_{fz,fTz}(t) \geq F_{fz,fTz}(t).$$

بنابراین $Tz = TTz = fTz$. به عبارت دیگر، Tz یک نقطه ثابت مشترک f و T می‌شود.

ب) فرض می‌کنیم f و T، $R-$جابجایی ضعیف از نوع (MA_f) باشند. چون f و T پیوسته دوجانبه ضعیف هستند، پس $\lim_{n\to\infty} fTx_n = fp$ یا $\lim_{n\to\infty} Tfx_n = Tp$.

فرض می‌کنیم $\lim_{n\to\infty} fTx_n = fp$. $R-$جابجایی ضعیف از نوع (MA_f) برای تابع‌های f و T نتیجه می‌دهد که برای همه $t > ۰$، $F_{fTx_n,TTx_n}(t) \geq Rf_{fx_n,Tx_n}(t)$. اگر $n \to \infty$ نتیجه می‌شود $TTx_n \to fp$. حال با استفاده از معادله (۲) داریم:

$$F_{Tp,TTx_n}(\varphi(t)) \geq a\, F_{fp,fTx_n}(t) + b\, min\, \{F_{fp,Tp}(t), F_{fTx_n,TTx_n}(t)\}$$
$$+ c\, min\{ F_{fp,fTx_n}(t), F_{fp,Tp}(t), F_{fTx_n,TTx_n}(t)\}.$$

با $n \to \infty$ به‌دست می‌آوریم:

$$F_{Tp,fp}(\varphi(t)) \geq a + (b+c)\, F_{fp,Tp}(t) \geq (a+b+c)F_{fp,Tp}(t) \geq F_{fp,Tp}(t),$$

به عبارت دیگر $Tp = fp$.

مجدداً ا ز $R-$جابجایی ضعیف از نوع (MA_f) داریم $F_{TTp,fTp}(t) \geq Rf_{fp,Tp}(t)$. پس $TTp = fTp = Tfp = ffp$. بنا به معادله (۲) نتیجه می‌شود:

$$F_{Tp,TTp}(\varphi(t)) \geq a\, F_{fp,fTp}(t) + b\, min\, \{F_{fp,Tp}(t), F_{fTp,TTp}(t)\}$$
$$+ c\, min\{F_{fp,fTp}(t), F_{fp,Tp}(t), F_{fTp,TTp}(t)\}$$
$$= (a+c)F_{fp,fTp}(t) + b \geq (a+b+c)F_{fp,fTp}(t)$$
$$\geq F_{fp,TTp}(t)$$

در نتیجه $Tp = TTp = fTp$. به عبارت دیگر Tp یک نقطه ثابت مشترک f و T می‌شود.

حال اگر $\lim_{n\to\infty} Tfx_n = Tp$، چو ن $T(X) \subseteq f(X)$، برا ی $z \in X$ نتیجه می‌شود $Tp = fz$ و $\lim_{n\to\infty} Tfx_n = fz$. چون $Tfx_{n+۱} = TTx_n$ و $Tfx_n \to fz$، داریم $TTx_n \to fz$. پس $R-$جابجایی ضعیف از نوع (MA_f) تابع‌های f و T نتیجه می‌دهد که برای همه $t > ۰$، $F_{fTx_n,TTx_n}(t) \geq Rf_{fx_n,Tx_n}(t)$. اگر $n \to \infty$، داریم $fTx_n \to fz$.

حال بنا به معادله (۲) داریم:

$$F_{Tz,TTx_n}(\varphi(t)) \geq \ a\, F_{fz,fTx_n}(t) \ + \ b\, min\,\{F_{fz,Tz}(t), F_{fTx_n,TTx_n}(t)\}$$
$$+\, c\, min\{\, F_{fz,fTx_n}(t), F_{fz,Tz}(t), F_{fTx_n,TTx_n}(t)\}.$$

با $n \to \infty$ بدست می‌آوریم:

$$F_{Tz,fz}(\varphi(t)) \geq \ a + (b+c)\, F_{fz,Tz}(t) \geq (a+b+c)F_{fz,Tz}(t),$$

در نتیجه $fz = Tz$. با همین روش، $R-$جابجایی ضعیف از نوع (MA_f) تابع‌های f و T برای همه $t > ۰$ نتیجه می‌دهد $F_{fTz,TTz}(t) \geq \ Rf_{fz,Tz}(t)$. پس داریم $fTz = Tfz = TTz = ffz$.

مجدداً از معادله (۲) بدست می‌آوریم:

$$F_{Tz,TTz}(\varphi(t)) \geq \ a\, F_{fz,fTz}(t) \ + \ b\, min\,\{F_{fz,Tz}(t), F_{fTz,TTz}(t)\}$$
$$+\, c\, min\{\, F_{fz,fTz}(t), F_{fz,Tz}(t), F_{fTz,TTz}(t)\}$$
$$= (a+c)F_{fz,fTz}(t) + \ b \geq (a+b+c)F_{fz,fTz}(t)$$
$$\geq F_{fz,TTz}(t).$$

در نتیجه $Tz = TTz = Tz$. پس Tz یک نقطه ثابت مشترک f و T می‌باشد.

پ) فرض می‌کنیم f و T، $R-$جابجایی ضعیف از نوع (MA_T) باشند. چون f و T پیوسته دوجانبه ضعیف هستند، پس یا $\lim_{n\to\infty} fTx_n = fp$ یا $\lim_{n\to\infty} Tfx_n = Tp$.

اگر $\lim_{n\to\infty} fTx_n = fp$. آنگاه از $R-$جابجایی ضعیف از نوع (MA_T) تابع‌های f و T برای همه $t > ۰$ به‌دست می‌دهد

$$F_{Tfx_n,fTx_{n-۱}}(t) = F_{Tfx_n,fTx_n}(t) \geq \ Rf_{Tx_n,fx_n}(t).$$

اگر $n \to \infty$، در نتیجه $Tfx_n \to \ fp$.

حال با استفاده از معادله (۲) بدست می‌آوریم:

$$F_{Tp,TTx_n}(\varphi(t)) \geq \ a\, F_{fp,fTx_n}(t) \ + \ b\, min\,\{F_{fp,Tp}(t), F_{fTx_n,TTx_n}(t)\}$$
$$+\, c\, min\{\, F_{fp,fTx_n}(t), F_{fp,Tp}(t), F_{fTx_n,TTx_n}(t)\}.$$

با $n \to \infty$، داریم:

$$F_{Tp,fp}(\varphi(t)) \geq \ a \ + \ (b+c)\, F_{fp,Tp}(t) \geq \ (a+b+c)F_{fp,Tp}(t) \geq F_{fp,Tp}(t),$$

به عبارت دیگر، $Tp = fp$.

مجدداً از $R-$جابجایی ضعیف از نوع (MA_T) داریم $F_{Tfp,ffp}(t) \geq Rf_{Tp,fp}(t)$. در نتیجه $TTp = fTp = Tfp = ffp$. بنا به معادله (۲)،

$$F_{Tp,TTp}(\varphi(t)) \geq a\,F_{fp,fTp}(t) + b\,min\,\{F_{fp,Tp}(t), F_{fTp,TTp}(t)\}$$
$$+ c\,min\{\,F_{fp,fTp}(t), F_{fp,Tp}(t), F_{fTp,TTp}(t)\}$$
$$= (a+c)F_{fp,fTp}(t) + b \geq (a+b+c)F_{fp,fTp}(t)$$
$$\geq F_{fp,TTp}(t),$$

بنابراین $Tp = TTp = fTp$. یعنی Tp یک نقطه ثابت مشترک f و T می‌باشد.

حال اگر $\lim_{n\to\infty} Tfx_n = Tp$، چون $T(X) \subseteq f(X)$، برای یک $z \in X$ نتیجه می‌شود $Tp = fz$ و $\lim_{n\to\infty} Tfx_n = fz$. چون $Tfx_{n+1} = TTx_n$ و $Tfx_{n+1} \to fz$، در نتیجه $TTx_n \to fz$. پس از $R-$جابجایی ضعیف از نوع (MA_T) تابع‌های f و T برای همه $t > 0$ بدست می‌آید

$$F_{Tfx_n,ffx_n}(t) \geq Rf_{Tx_n,fx_n}(t)\,.$$

با فرض $n \to \infty$ نتیجه می‌گیریم $ffx_n \to fz$.

حال بنا به معادله (۲) داریم:

$$F_{Tz,TTx_n}(\varphi(t)) \geq a\,F_{fz,fTx_n}(t) + b\,min\,\{F_{fz,Tz}(t), F_{fTx_n,TTx_n}(t)\}$$
$$+ c\,min\{\,F_{fz,fTx_n}(t), F_{fz,Tz}(t), F_{fTx_n,TTx_n}(t)\}.$$

اگر $n \to \infty$ داریم:

$$F_{Tz,fz}(\varphi(t)) \geq a + (b+c) \quad F_{fz,Tz}(t) \geq (a+b+c)F_{fz,Tz}(t),$$

و بنابراین $fz = Tz$. با همین روش، $R-$جابجایی ضعیف از نوع (MA_T) تابع‌های f و T برای همه $t > 0$ نتیجه می‌دهد $F_{Tfz,ffz}(t) \geq Rf_{Tz,fz}(t)$. پس داریم $fTz = Tfz = TTz = ffz$.

دوباره از معادله (۲) داریم:

$$F_{Tz,TTz}\big(\varphi(t)\big) \geq a\,F_{fz,fTz}(t) + b\min\big\{F_{fz,Tz}(t), F_{fTz,TTz}(t)\big\}$$
$$+ c\min\big\{\,F_{fz,fTz}(t), F_{fz,Tz}(t), F_{fTz,TTz}(t)\big\}$$
$$= (a+c)F_{fz,fTz}(t) + b \geq (a+b+c)F_{fz,fTz}(t) \geq F_{fz,TTz}(t).$$

بنابراین $Tz = TTz = Tz$. یعنی Tz یک نقطه ثابت مشترک f و T می‌باشد. لذا برهان قضیه کامل می‌شود. □

مراجع:

[1] S. Banach, Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals, Fund. Math. 3 (1922) 133-181.

[2] L.B. Ćirić, On some nonexpansive type mapping and fixed points, Indian J. Pure Appl. Math. 24 (1993) 145-149.

[3] L.B. Ćirić, RP. Agarwal, B. Samet, Mixed monotone-generalized contractions in partially ordered probabilistic metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 56 (2011).

[4] O. Hadzić, A fixed point theorem in Menger spaces, Publ. Inst. Math. (Belgr.) 20 (1979) 107-112.

[5] O. Hadzić, Z. Ovcin, Fixed point theorems in fuzzy metric and probabilistic metric spaces, Zb. Rad. Prir.-Mat. Fak., Ser. Mat. 24 (1994) 197-209.

[6] J. Jachymski, On probabilistic φ −contractions on Menger spaces, Nonlinear Anal. 73 (2010) 2199-2203.

[7] P.K. Jhade and A.S. Saluja, Common fixed points theorem for nonexpansive type single valued mappings, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 7 (2016) 45-51.

[8] Jun Wu, Some fixed-point theorems for mixed monotone operators in partially ordered probabilistic metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 49 (2011).

[9] G. Jungck, Compatible mappings and common fixed point, Intern. J. Math. Math. Sci. 9 (1986) 771-779.

[10] R.P. Pant, Common fixed points of non-commuting mappings, J. Math. Anal. Appl. 188 (1994) 436-440.

[11] R.P. Pant, Common fixed points for contractive maps, J. Math. Anal. Appl. 1226 (1998) 251-258.

[12] R.P. Pant, R.K. Bisht and D. Arora, Weak reciprocal continuity and fixed point theorems, Ann. Univ. Ferrara 57 (2011) 181-190.

[13] H.K. Pathak, Y.J. Cho and S.M. Kang, Remark on R-weak commuting mappings and common fixed point theorems, Bull. Korean Math. Soc. 34 (1997) 247-257.

[14] B. Samet, M. Rajović, R. Lazović, R. Stojiljković, Common fixed-point results for nonlinear contractions in ordered partial metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 71 (2011).

[15] B. Schweizer, A. Sklar, Probabilistic Metric Spaces, North-Holland, New York, 1983.

[16] VM. Sehgal, AT. Bharucha-Reid, Fixed points of contraction mappings on PM-spaces, Math. Syst. Theory 6 (1972) 97-102.

[17] S. Sessa, On a weak commutativity condition of mappings in fixed point consideration, Publ. Inst. Math. 32 (1982) 129-153.