سیستم‌های مختلط و غیرخطی
دوره ۱، شماره ۱ (بهار و تابستان ۱۳۹۶) صص ۴۷ تا ۵۵

روش شبه طیفی مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل مسأله غیرخطی کلین-گوردن

بابک آذرنوید[1,*]، کوروش پرند[1,2]

[1]دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده ریاضی، گروه علوم کامپیوتر
[2]دانشگاه شهید بهشتی، پژوهشکده علوم شناختی و مغز، گروه مدل سازی شناختی

چکیده: در این مقاله روش شبه طیفی مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل مسأله غیرخطی کلین-گوردن معرفی خواهد شد. به منظور تقریب مشتق‌های مکانی مسأله از ماتریس های عملیاتی به دست آمده با استفاده ازهسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت وهمچنین به منظور گسسته سازی بعد زمانی مسأله از روش رانگ کوتای مرتبه چهار استفاده می‌کنیم. استفاده از ماتریس‌های عملیاتی به دست آمده با استفاده ازهسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت همچنین اعمال دقیق شرایط مرزی بر روی پایه ها از مزایای روش معرفی شده هستند. در پایان چند مثال برای نشان دادن کارایی و توانایی روش برای حل مسائل غیرخطی وابسته به زمان ارائه شده است.

کلمات کلیدی: هسته بازتولیدی فضای هیلبرت؛ روش شبه طیفی؛ مسأله کلین-گوردن؛ روش رانگ کوتا.

۱. سرآغاز

مسائل غیرخطی از جمله مسأله کلین-گوردن در بسیاری از مسائل کاربردی فیزیکی از جمله فیزیک پلاسما [۱ و ۲] و فیزیک حالت جامد [۱ و ۲] ظاهر می‌شوند. مسأله مقدار اولیه غیرخطی کلین-گوردن به صورت زیر داده می‌شود:

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial t^{۲}}+\alpha \nabla^{۲} u+\mathcal{N}(u)=f\ (x, t),\ x \in[a, b], t \geq ۰ \qquad (۱)$$

همراه با شرایط اولیه $u(x,۰)=u_۰(x), \partial_t u(x,۰)=v_۰(x)$ و شرایط مرزی دیریکله، که در آن $u=u(x,t)$ بیانگر جابجایی موج در موقعیت x و زمان t، α یک ثابت معین و $\mathcal{N}(u)$ یک تابع غیرخطی است.

[*]نویسنده مسئول مکاتبات (رایانامه: babakazarnavid@yahoo.com)
تاریخ دریافت: خرداد ۱۳۹۶؛ تاریخ پذیرش: مرداد ۱۳۹۶

در سال‌های اخیر پژوهش‌های زیادی در زمینه کاربرد هسته های بازتولیدی فضای هیلبرت در آنالیز عددی و روش‌های محاسباتی انجام شده است که از جمله می‌توان به حل عددی معادلات با مشتقات جزیی با استفاده از روش‌های گالرکین و هم محلی [۳] جواب‌های چندگانه مسائل غیرخطی مقدار مرزی [۴]، تقریب معادلات با مشتقات جزیی تصادفی [۵]، حل عددی معادلات انتگرالی [۶] و کاربرد هسته‌ها در روش‌های یادگیری ماشین [۷] اشاره کرد. روش‌های مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت به صورت موفقیت آمیزی بر روی بسیاری از مسائل غیرخطی به کار رفته‌اند، به عنوان مثال حل دستگاه غیرخطی مسائل مقدار مرزی، مسائل با نقطه بازگشت منفرد و مسائل غیرخطی در پدیده‌های ستاره شناسی [۸ تا ۱۱]. در اینجا ما هسته‌های بازتولیدی را برای تولید ماتریس‌های عملیاتی به کار برده و با استفاده از ترکیب روش شبه طیفی با روش رانگ کوتا به حل مسأله غیرخطی وابسته به زمان کلین-گوردن می‌پردازیم. هسته‌های بازتولیدی طوری ساخته می‌شوند که در شرایط مرزی مسأله به طور دقیق صدق کنند. در پایان چند مثال برای نشان دادن کارایی و توانایی روش برای حل مسائل غیرخطی وابسته به زمان ارائه شده است.

۲. روش حل

در این بخش، روش شبه طیفی مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل مساله (۱) همراه با شرایط مقدار اولیه و شرایط مرزی دیریکله به کار برده خواهد شد. ابتدا به کمک تابع مناسب $h(x)$ شرایط مرزی را همگن سازی می‌کنیم. بعد از همگن سازی شرایط به صورت زیر

$$u(x,t) = v(x,t) + h(x) \tag{۲}$$

مسأله را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \alpha \nabla^2 v + \mathcal{N}(v+h) = f(\boldsymbol{x},t) - \alpha \nabla^2 h, \ \boldsymbol{x} \in [a,b], t \geq 0, \\ v(x,0) = u_0(x) - h(x), \partial_t v(x,0) = v_0(x), \qquad \boldsymbol{x} \in [a,b] \\ v(a,t) = 0, \quad v(b,t) = 0. \qquad t \geq 0 \end{cases} \tag{۳}$$

حال هدف حل مساله فوق با استفاده از روش شبه طیفی مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت است. بنابراین ابتدا به معرفی هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت می‌پردازیم.

به منظور حل مسأله (۳) فضاهای هیلبرت با هسته بازتولیدی $m \geq 3, W_{2,0}^m[a,b], W_2^m[a,b]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱. فضای ضرب داخلی $W_2^m[a,b]$ را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$W_2^m[a,b] = \left\{ u(x) \mid u^{(m-1)} \text{ is absolutely continuous and } u^{(m)} \in L^2[a,b] \right\}.$$

ضرب داخلی فضای $W_2^m[a,b]$ را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\left(u(.),v(.)\right)_{W_2^m}=\sum_{i=0}^{m-1}u^{(i)}(0)v^{(i)}(0)+\int_a^b u^{(m)}(x)v^{(m)}(x)dx \tag{۴}$$

همچنین نرم $\|u\|$ را به صورت $\|u\|_{W_2^m}=\sqrt{(u,v)_{W_2^m}}$ خواهیم داشت که در آن $u,v\in W_2^m[a,b]$.

قضیه ۱. فضای $W_2^m[a,b]$ یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی است. یعنی برای هر $u(.)\in W_2^m[a,b]$ و هر $y\in[a,b]$ ثابت، هسته $R_y(.)\in W_2^m[a,b]$ وجود دارد به طوری که $\left(u(.),R_y(.)\right)_{W_2^m}=u(y)$. هسته بازتولیدی $R_y(.)$ به صورت زیر است:

$$R_y(x)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{2m}c_i(y)x^{i-1}, & x\le y,\\ \sum_{i=1}^{2m}d_i(y)x^{i-1}, & x\ge y.\end{cases} \tag{۵}$$

برهان. به [۸] مراجعه شود.

تعریف ۲. فضای ضرب داخلی $W_{2,0}^m[a,b]$ را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$W_2^m[a,b]=\left\{u(x)\,|\,u^{(m-1)}\text{ is absolutely continuous and }u^{(m)}\in L^2[a,b]\text{ and }u(a)=u(b)\right\}.$$

ضرب داخلی فضای $W_{2,0}^m[a,b]$ یک زیرفضای $W_2^m[a,b]$ بوده و ضرب داخلی و نرم آن مشابه فضای $W_2^m[a,b]$ خواهد بود. برای مشاهده جزییات بیشتر در مورد فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی $W_2^m[a,b]$ و $W_{2,0}^m[a,b]$ و روش به دست آوردن هسته بازتولیدی آن ها به [۸] و مراجع ذکر شده در آن‌ها مراجعه کنید.

حال فرض کنید $R_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای $W_{2,0}^m[a,b]$ است و قرار دهید $\psi_j(x)=R_{x_j}(x)$ که در آن $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک مجموعه چگال در $[a,b]$ است، در این صورت $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک مجموعه کامل در $W_{2,0}^m[a,b]$ است [۸ و ۹]. در روش شبه طیفی مبتنی بر هسته های بازتولیدی توابع $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ به عنوان توابع پایه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

ابتدا روش شبه طیفی به صورت خلاصه معرفی خواهد شد. یافتن جواب در یک مجموعه گسسته از نقاط یکی از ویژگی‌های مهم روش شبه طیفی است. معمولاً در روش‌های شبه طیفی جواب مسأله به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u_N(x)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\psi_j(x), \tag{۶}$$

در نقاط $x_i, i=1,\dots,N$ از توابع پایه‌ای $\psi_j(x)$ استفاده می‌کنیم و تقریب تابع $u(x)$ را در نقاط گره‌ای $x_i, i=1,\dots,N$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u_N(x_i)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\psi_j(x_i),\qquad i=1,\dots,N, \tag{۷}$$

که فرم ماتریسی آن را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{\lambda}, \tag{۸}$$

که در آن $\boldsymbol{\lambda} = \left[\lambda_1, \ldots, \lambda_N\right]^T$ بردار ضرایب ، A ماتریس درونیاب با عناصر $A_{i,j} = \psi_j\left(x_i\right)$ و $\boldsymbol{u} = \left[u_N\left(x_1\right), \ldots, u_N\left(x_N\right)\right]^T$ می‌باشند. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک عملگر خطی باشد، با اعمال این عملگر بر $u_N\left(x\right)$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}u_N = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mathcal{L}\psi_j\left(x\right), \tag{۹}$$

اگر نقاط $x_i, i = 1, \ldots, N$ در رابطه فوق قرار گیرند، دستگاه ماتریسی زیر را خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{Lu} = A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\lambda}, \tag{۱۰}$$

که در آن $\boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{\lambda}$ مانند قبل بوده و مؤلفه‌های ماتریس $A_{\mathcal{L}}$ به صورت $\left(A_{\mathcal{L}}\right)_{i,j} = \mathcal{L}\psi_j\left(x_i\right)$ خواهند بود. با استفاده از فرم ماتریسی $\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{\lambda}$ بردار ضرایب را به صورت $\boldsymbol{\lambda} = A^{-1}\boldsymbol{u}$ خواهیم داشت، سپس با استفاده از رابطه قبل داریم:

$$\boldsymbol{Lu} = A_{\mathcal{L}}A^{-1}\boldsymbol{u}, \tag{۱۱}$$

بنابر این ماتریس عملیاتی $\boldsymbol{L}$ متناظر با عملگر $\mathcal{L}$ را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{L} = A_{\mathcal{L}}A^{-1}. \tag{۱۲}$$

معکوس پذیری ماتریس درونیاب A برای به دست آوردن ماتریس عملیاتی $\boldsymbol{L}$ ضروری است. در حالت کلی معکوس پذیری ماتریس درونیاب A به پایه‌های مورد استفاده و همچنین نقاط گره‌ای $x_i, i = 1, \ldots, N$ وابسته است. در هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت با توجه به معین و مثبت بودن هسته معکوس‌پذیری ماتریس درونیاب برای هر مجموعه از نقاط دو به دو مجزا تضمین می‌شود. با نادیده گرفتن شرایط مرزی فرض کنید معادله دیفرانسیل خطی زیر را داریم:

$$\mathcal{L}u = f,$$

جواب تقریبی را می‌توان با حل دستگاه خطی ماتریسی زیر به دست آورد:

$$\boldsymbol{Lu} = \boldsymbol{f},$$

که در آن مؤلفه‌های بردارهای $\boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{f}$ مقادیر توابع u و f در نقاط گرهی و $\boldsymbol{L}$ ماتریس عملیاتی مربوط به عملگر دیفرانسیلی $\mathcal{L}$ هستند.

ابتدا مسأله کلین-گوردن (۱) را به صورت یک دستگاه معادلات مرتبه اول نسبت به متغیر زمان به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \partial_t u\left(x,t\right) = v\left(x,t\right), \\ \partial_t v\left(x,t\right) = -\alpha\nabla^2 u - N\left(u\right) + f\left(\boldsymbol{x},t\right) \end{cases} \tag{۱۳}$$

همراه شرایط مرزی دیریکله و شرایط اولیه زیر:

$$u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), \tag{۱۴}$$

$$v\left(x,0\right)=v_{0}\left(x\right). \tag{۱۵}$$

قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} F_{1}\left(t,U,V\right)=V\left(X,t\right), \\ F_{2}\left(t,U,V\right)=-\alpha L_{\nabla}U\left(X,t\right)-N\left(U\left(\boldsymbol{X},t\right)\right)+f\left(\boldsymbol{X},t\right), \end{cases}$$

که در آن

$$\boldsymbol{X}=\left[x_{1},x_{2},\ldots,x_{N}\right]^{T},$$

$$U\left(\boldsymbol{X},t\right)=\left[u\left(x_{1},t\right),u\left(x_{2},t\right),\ldots,u\left(x_{N},t\right)\right]^{T},$$

$$V\left(\boldsymbol{X},t\right)=\left[v\left(x_{1},t\right),v\left(x_{2},t\right),\ldots,v\left(x_{N},t\right)\right]^{T},$$

$$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{X},t\right)=\left[f\left(x_{1},t\right),f\left(x_{2},t\right),\ldots,f\left(x_{N},t\right)\right]^{T}$$

و L_{∇} ماتریس عملیاتی مربوط به عملگر خطی ∇^{2} است. بنابراین مسأله را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}=F_{1}\left(t,U,V\right), \\ \dfrac{dV}{dt}=F_{2}\left(t,U,V\right), \end{cases} \tag{۱۶}$$

همراه با شرایط اولیه زیر:

$$\begin{cases} U\left(\boldsymbol{X},0\right)=u_{0}\left(X\right), \\ V\left(\boldsymbol{X},0\right)=v_{0}\left(X\right). \end{cases} \tag{۱۷}$$

حال با استفاده از روش گسسته سازی زمانی صریح رانگ کوتای مرتبه چهار و ماتریس‌های عملیاتی هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت مسأله (۱۶)- (۱۷) را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} U_{N}^{m+1}=U_{N}^{m}+\frac{1}{6}\left(k_{1,1}+2k_{2,1}+2k_{3,1}+k_{4,1}\right), \\ V_{N}^{m+1}=V_{N}^{m}+\frac{1}{6}\left(k_{1,2}+2k_{2,2}+2k_{3,2}+k_{4,2}\right), \end{cases} \tag{۱۸}$$

که در آن برای $i=1,2$ داریم:

$$k_{1,i}=d_{t}F_{i}\left(t_{m},U_{N}^{m},V_{N}^{m}\right),$$

$$k_{2,i}=d_{t}F_{i}\left(t_{m}+\frac{dt}{2},U_{N}^{m}+\frac{1}{2}k_{1,1},V_{N}^{m}+\frac{1}{2}k_{1,2}\right),$$

$$k_{3,i}=d_{t}F_{i}\left(t_{m}+\frac{dt}{2},U_{N}^{m}+\frac{1}{2}k_{2,1},V_{N}^{m}+\frac{1}{2}k_{2,2}\right),$$

$$k_{4,i}=d_{t}F_{i}\left(t_{m}+dt,U_{N}^{m}+k_{3,1},V_{N}^{m}+k_{3,2}\right).$$

۳. نتایج عددی

در این بخش به منظور نشان دادن کارایی و توانایی روش در حل مسائل غیرخطی وابسته به زمان از جمله مسأله غیرخطی کلین–گوردن به ارائه نتایج به دست آمده برای چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱. مسأله غیرخطی کلین–گوردن زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u^2+6xt+2x,\quad 0\le x\le 1, t_0<t<T, \tag{19}$$

با شرایط اولیه

$$u(x,t_0)=x^3t_0^3,\qquad u_t(x,t_0)=3x^3t_0^2, \tag{20}$$

و شرایط مرزی

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=t^3, \tag{21}$$

جواب دقیق مسأله فوق به صورت زیر است:

$$u(x,t)=x^3t^3,\qquad t_0\le t<T. \tag{22}$$

در این مثال قرار می‌دهیم $d_t=\frac{1}{1000}$, $T=1,2,3,4,5, t_0=d_t$ و $N=50$ و با استفاده از روش شبه طیفی مبتنی به هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت به حل مسأله می‌پردازیم. در جدول ۱ ماکزیمم خطای مطلق نتایج به دست آمده با بهترین نتایج گزارش شده در [۱۲ و ۱۳] مقایسه شده است که نشان دهنده قدرت و توانایی روش معرفی شده در حل مسائل غیرخطی وابسته به زمان است.

t	مرجع [۱۲]	مرجع [۱۳]	روش معرفی شده W_2^3	روش معرفی شده W_2^5
۱	۱,۱۰۱۲ E −۵	۳,۳۷ E −۹	۳,۱۲۱۱۶ E −۶	۱,۵۰۴۷۹ E −۱۱
۲	۱,۶۴۹۶ E −۴	۱,۶۱ E −۸	۲,۴۹۲۲۷ E −۵	۱,۲۳۵۶۲ E −۱۰
۳	۵,۹۷۲۸ E −۴	۱,۱۲ E −۷	۸,۴۶۰۴۶ E −۵	۴,۱۶۲۶۴ E −۱۰
۴	۱,۸۲۶۴ E −۳	۳,۲۲ E −۷	۲,۰۰۳۹۵ E −۴	۹,۸۲۹۱۸ E −۱۰
۵	۳,۶۹۱۵ E −۳	۶,۹۵ E −۷	۳,۹۰۱۳۲ E −۴	۱,۹۱۰۸۳ E −۱۰

جدول ۱. مقایسه ماکزیمم خطای مطلق با استفاده از $N=50$ و $d_t=\frac{1}{1000}$.

مثال ۲. مسأله غیرخطی کلین–گوردن زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u-u^3+f(x,t),\ -1\le x\le 1, 0<t<T, \tag{23}$$

که در آن

$$f(x,t)=\left(x^{۲}-۲\right)\cosh\left(x+t\right)-۴x\sinh\left(x+t\right)+x^{۶}\cosh^{۳}\left(x+t\right),$$

با شرایط اولیه

$$u\left(x,۰\right)=x^{۲}\cosh x,\qquad u_t\left(x,۰\right)=x^{۲}\sinh x, \tag{۲۴}$$

و شرایط مرزی

$$u\left(-۱,t\right)=\cosh\left(-۱+t\right),\quad u\left(۱,t\right)=\cosh\left(۱+t\right), \tag{۲۵}$$

جواب دقیق مسأله فوق به صورت زیر است:

$$u\left(x,t\right)=x^{۲}\cosh\left(x+t\right),\qquad ۰\le t<T. \tag{۲۶}$$

در این مثال قرار می‌دهیم $t_{.}=dt, dt=\frac{۱}{۱۰۰}$ ، $T=۱,۲,۳,۴,۵$ و $N=۱۰۰$ و با استفاده از روش شبه طیفی مبتنی به هسته-های بازتولیدی فضای هیلبرت به حل مسأله میپردازیم. در جدول ۲ ماکزیمم خطای مطلق نتایج به دست آمده با بهترین نتایج گزارش شده در [۱۲ و ۱۴] مقایسه شده است که نشان‌دهنده قدرت و توانایی روش معرفی شده در حل مسائل غیرخطی وابسته به زمان است.

t	مرجع [۱۲]	مرجع [۱۴]	روش معرفی شده $W_۲^۳$	روش معرفی شده $W_۲^۵$
۱	$۵.۰۷۰۵\,E-۵$	$۹.۴۵۲۶\,E-۵$	$۲.۴۶۵۷۸\,E-۵$	$۱.۶۶۸۲۱\,E-۸$
۲	$۵.۰۲۶۰\,E-۴$	$۹.۷۹۳۳\,E-۴$	$۶.۳۲۸۹۵\,E-۵$	$۵.۶۹۷۹۶\,E-۸$
۳	$۲.۰۶۱۲\,E-۳$	$۳.۹۷۴۰\,E-۳$	$۹.۱۵۰۷۳\,E-۵$	$۷.۷۰۶۲۷\,E-۷$
۴	$۶.۵۷۲۰\,E-۳$	$۱.۲۹۶۰\,E-۲$	$۸.۷۸۷۱۱\,E-۵$	$۱.۴۴۹۹\,E-۵$
۵	$۱.۹۰۶۷\,E-۲$	$۳.۷۲۲۴\,E-۲$	$۲.۹۵۶۵۵\,E-۴$	$۳.۰۱۶۱۹\,E-۴$

جدول ۲. مقایسه ماکزیمم خطای مطلق با استفاده از $N=۱۰۰$ و $d_t=\frac{۱}{۱۰۰}$.

با توجه به نتایج ارائه شده در جدول‌های ۱ و ۲ به سادگی می‌توان مشاهده کرد که با استفاده از هسته‌های بازتولیدی با درجه همواری بیشتر نتایج دقیق‌تری به دست می‌آیند که نتایج تحلیلی به دست آمده در مرجع [۱۵] را تأیید می‌کند.

۴. نتیجه گیری

در این مقاله یک روش شبه طیفی مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل مسأله غیرخطی کلین–گوردن معرفی شده است. در این روش ماتریس‌های عملیاتی را با استفاده از هسته‌های بازتولیدی یک فضای هیلبرت به دست می-آوریم به طوری که هسته‌های بازتولیدی به طور دقیق در شرایط مرزی مسأله صدق می‌کنند. به منظور گسسته سازی بعد زمانی مسأله از روش رانگ کوتای مرتبه چهار استفاده کرده‌ایم. استفاده از ماتریس‌های عملیاتی به دست آمده با استفاده

ازهسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت همچنین اعمال دقیق شرایط مرزی بر روی پایه ها از مزایای روش معرفی شده هستند. در پایان چند مثال برای نشان دادن کارایی و توانایی روش برای حل مسائل غیرخطی وابسته به زمان ارائه شده است. نتایج به دست آمده و مقایسه آن‌ها با نتایج گزارش شده در مقالات بر توانایی، دقت و کارایی روش معرفی شده تأکید دارند.

سپاسگزاری

بدینوسیله نگارندگان مقاله از حمایت مالی صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور[1] و دانشگاه شهید بهشتی در انجام این تحقیق تشکر و قدردانی می‌نمایند.

مراجع:

[1] L. Debnath, Nonlinear Klein–Gordon and Sine-Gordon Equations, Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhäuser Boston, 2012: 579-622.

[2] P.G. Drazin, R.S. Johnson, Solitons: an introduction. Vol. 2. Cambridge university press, 1989.

[3] R. Schaback, Convergence of unsymmetric kernel-based meshless collocation methods, SIAM J. Numer. Anal. 45 (2007) 333-351.

[4] S. Abbasbandy, B. Azarnavid, M.S. Alhuthali, A shooting reproducing kernel Hilbert space method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems, J. Comput. Appl. Math. 279 (2015) 293-305.

[5] I. Cialenco, G.E. Fasshauer, Q. Ye, Approximation of stochastic partial differential equations by a kernel-based collocation method, International Journal of Computer Mathematics 89 (2012) 2543-2561.

[6] H. Du, M.G. Cui, Approximate solution of the Fredholm integral equation of the first kind in a reproducing kernel Hilbert space, Appl. Math. Lett. 21 (2008) 617-623.

[7] G.E. Fasshauer, F.J. Hickernell, Q. Ye, Solving support vector machines in reproducing kernel Banach spaces with positive definite functions, Applied and Computational Harmonic Analysis 38 (2015) 115-139.

[8] M.G. Cui, Y. Lin, Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space. Nova Science, New York, USA, 2009.

---

[1] Iran National Science Foundation:INSF

[9] F. Geng, M.G. Cui, B. Zhang, Method for solving nonlinear initial value problems by combining homotopy perturbation and reproducing kernel Hilbert space methods, Nonlinear Anal.: Real World Appl. 11 (2010) 637-644.

[10] F. Geng, M.G. Cui, Solving a nonlinear system of second order boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 327 (2007) 1167-1181.

[11] B. Azarnavid, F. Parvaneh, S. Abbasbandy, Picard-reproducing kernel Hilbert space method for solving generalized singular nonlinear Lane-Emden type equations, Math. Model. Anal. 20 (2015) 754-767.

[12] M. Dehghan, A. Shokri, Numerical solution of the nonlinear Klein-Gordon equation using radial basis functions, J. Comput. Appl. Math. 230 (2009) 400-410.

[13] C.W. Chang, C.S. Liu, An implicit Lie-group iterative scheme for solving the nonlinear Klein–Gordon and sine-Gordon equations, Appl. Math. Model. 40 (2016) 1157-1167.

[14] F. Yin, T. Tian, J. Song, M. Zhu, Spectral methods using Legendre wavelets for nonlinear Klein\ Sine-Gordon equations, J. Comput. Appl. Math. 275 (2015) 321-334.

[15] S. Abbasbandy, B. Azarnavid, Some error estimates for the reproducing kernel Hilbert spaces method, J. Compu. Appl. Math. 296 (2016) 789-797.