سیستم‌های مختلط و غیرخطی
دوره ۱، شماره ۱ (بهار و تابستان ۱۳۹۶) صص ۶۷ تا ۷۵

روش پیکارد–لیندلف برای مسایل مقدار اولیه با مشتق کسری پربهاکار

محمدحسین درخشان، علیرضا انصاری*، ندا آهنجیده

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد

چکیده: در این مقاله، یک دستگاه دیفرانسیل کسری بر حسب مشتق کسری پربهاکار[۱] را معرفی می‌کنیم و با به کاربردن تبدیل لاپلاس جواب این دستگاه کسری را بر حسب تابع متیگ–لفلر[۲] سه پارامتری به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن وجود و یکتایی جواب این دستگاه کسری، جواب را بر حسب یک دنباله بازگشتی نوشته و با استفاده از قضیه پیکارد–لیندلف[۳] وجود و یکتایی جواب این دستگاه کسری را اثبات می‌کنیم. در نهایت با استفاده از قضیه بیان شده در مقاله یک مثال را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: مشتق کسری پربهاکار؛ وجود و یکتایی؛ روش پیکارد–لیندلف؛ تابع میتگ–لفلر.

۱ سرآغاز

در دهه‌های اخیر، نظریه حساب کسری و دستگاه‌های دیفرانسیل کسری در علوم کاربردی و مهندسی مورد توجه بسیاری دانشمندان قرار گرفته است. بعضی از جنبه‌های ریاضی و کاربردی را می‌توان به [۱–۴] و منابع مربوط به آن اشاره کرد. در این مقاله ما یک دستگاه دیفرانسیل شامل مشتق کسری به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathsf{D}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < \alpha < 1, \ t \in \mathbf{R}^n, \tag{۱}$$

که عملگر D^{α} یک عملگر کسری بر حسب مشتق کسری از مرتبه α و $f(t,x)$ تابع برداری پیوسته است. در این مقاله وجود و یکتایی دستگاه دیفرانسیل کسری یکی از مهم‌ترین اهداف است. وجود و یکتایی برای یک مسئله مقدار اولیه برای یک معادله دیفرانسیل مرتبه کسری در [۵, ۶] مطالعه شده است. ما در اینجا قصد داریم با جایگزین کردن یک مشتق تعمیم یافته به جای D^{α} به بررسی وجود و یکتایی جواب این دستگاه کسری با استفاده از قضیه پیکارد– لیندلوف بپردازیم.

[۱] Prabhakar
[۲] Mittag–Leffler
[۳] Picard-Lindelof

*نویسنده مسئول مکاتبات (رایانامه: alireza_1038@yahoo.com)

تاریخ دریافت: خرداد ۱۳۹۶؛ تاریخ پذیرش: مرداد ۱۳۹۶

مشتق کسری بیان شده D^{α} با جایگزین کردن یک تابع سه پارامتری به جای هسته مشتق کسری ریمان- لیوویل به دست می‌آید. به این تابع سه پارامتری تابع متیگ-لفلر می‌گویند و به D^{α} مشتق کسری پربهاکار گفته می‌شود که توسط پربهاکار مطرح شده است [۷, ۸]. اکنون در این مقاله قصد داریم یک نوعی از مشتق کسری به نام مشتق کسری پربهاکار را بیان کنیم و در مورد این دستگاه کسری بیان شده در مقاله شامل این مشتق کسری وجود و یکتایی جواب این دستگاه را با استفاده قضیه پیکارد- لیندلوف اثبات کنیم. برای این هدف، در فصل ۲ به بیان تعاریف و مقدمات مورد نیاز می‌پردازیم که در بخش‌های بعدی از آن‌ها استفاده می‌کنیم. در فصل ۳ وجود و یکتایی این دستگاه کسری را با استفاده از قضیه پیکارد- لیندلف مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در فصل ۴ با یک مثال به تفسیر وجود و یکتایی آن با استفاده از قضیه پیکارد-لیندلف خواهیم پرداخت.

۲ تعاریف و مقدمات

تعریف ۱. (کیل‌باس و همکاران [۲]): فرض کنیم $f \in L^1(0,b)$ و $0<t<b\le+\infty$ ، در این صورت انتگرال و مشتق کسری ریمان-لیوویل[۴] از مرتبه α به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ {}_{0^+}I_t^{\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(u)(t-u)^{\alpha-1}du,\ t>0, 0<\alpha<1, \tag{۲}$$

$$ {}_{0^+}D_t^{\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(u)(t-u)^{-\alpha}du,\ t>0, 0<\alpha<1. \tag{۳}$$

همچنین برای تابع به طورمطلق پیوسته f، مشتق کسری کپوتو[۵] از مرتبه α به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ {}_{0^+}^{C}D_t^{\alpha} f(t)={}_{0^+}I_t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-u)^{-\alpha}\frac{d}{du}f(u)du. \tag{۴}$$

تعریف ۲. (پربهاکار [۸]): فرض کنیم $f \in L^1(0,b)$ و $0<t<b\le+\infty$ ، در این صورت انتگرال کسری پربهاکار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ (\mathbf{E}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+} f)(t)=\int_0^t (t-u)^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})f(u)du. \tag{۵}$$

که $E^{\gamma}_{\rho,\mu}$ تابع متیگ-لفلر تعمیم یافته است که در سال ۱۹۷۱ توسط پربهاکار معرفی شده است:

$$ E^{\gamma}_{\rho,\mu}(z)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+n)}{n!\,\Gamma(\rho n+\mu)}z^{n}. \tag{۶}$$

---

[۴] Riemann–Liouville

[۵] Caputo

تعریف ۳. (پربهاکار [۸]): فرض کنیم $f \in L^{1}(0,b)$ و $0<t<b\leq+\infty$، در این صورت مشتق کسری پربهاکار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\mathrm{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+}f)(t)=\frac{d}{dt}\mathrm{E}^{-\gamma}_{\rho,1-\mu,\omega,0^+}f(t),t>0, \quad (۷)$$

که $0<\mu<1$ و $\rho,\mu,\omega,\gamma\in\mathbf{C}$.

لم ۱. (پربهاکار [۸]): تبدیل لاپلاس مشتق کسری پربهاکار برای $0<\mu<1$ به صورت زیر داده شده است:

$$\mathrm{L}\{\mathrm{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+}f(t);s\}=s^{\mu}(1-\omega s^{-\rho})^{\gamma}F(s)-\mathrm{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+}f(0^+), \quad (۸)$$

که $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است که به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt \ .$$

لم ۲. (پربهاکار [۸]): تبدیل لاپلاس تابع متیگ-لفلر تعمیم یافته $t^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho})$ به صورت زیر داده شده است:

$$\mathrm{L}\{t^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho});s\}=\frac{s^{\rho\gamma-\mu}}{(s^{\rho}-\omega)^{\gamma}},\ \left|\frac{\omega}{s^{\rho}}\right|<1. \quad (۹)$$

لم۳. (کیل‌باس و همکاران [۲]): فرض می‌کنیم $\rho,\mu,\omega,\gamma\in\mathbf{C}\,(\mathrm{Re}(\rho),\mathrm{Re}(\mu)>0)$. پس

$$\int_0^{t}u^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega u^{\rho})du=t^{\mu}E^{\gamma}_{\rho,\mu+1}(\omega t^{\rho}). \quad (۱۰)$$

لم۴. (کیل‌باس و همکاران [۲]): فرض می‌کنیم $\rho,\mu,\omega,\gamma\in\mathbf{C}\,(\mathrm{Re}(\rho),\mathrm{Re}(\mu)>0)$. پس:

$$\int_0^{t}(t-u)^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})u^{\nu-1}E^{\sigma}_{\rho,\nu}(\omega u^{\rho})du=t^{\mu+\nu-1}E^{\gamma+\sigma}_{\rho,\nu+\mu}(\omega t^{\rho}). \quad (۱۱)$$

تعریف ۴. یک تابع برداری $f:D\rightarrow\mathbf{R}^{n}$ در شرط لیپشیتس نسبت به x روی هر مجموعه باز $D\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n}$ برای هر مستطیل

$$Q=\{(t,x):0\leq t\leq a,\|x-x_0\|\leq b\}\subset D,$$

صدق می‌کند اگر برای تمام $(t,x),(t,y)\in Q$ یک ثابت K_Q، که ممکن است وابسته به مجموعه Q باشد وجود داشته باشد به طوری که

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leq K_Q\|x-y\|. \quad (۱۲)$$

تعریف ۵. یک تابع برداری $f: D \to \mathbf{R}^n$ در شرط لیپشیتس[۶] یکنواخت نسبت به x روی هر مجموعه باز $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ صدق می‌کند اگر برای تمام $(t,x),(t,y) \in Q$ یک ثابت K وجود داشته باشد به طوری که

$$\|f(t,x)-f(t,y)\| \le K\|x-y\|,$$

که ثابت K را ثابت لیپشیتس می‌نامند.

قضیه ۱. (کیلباس و همکاران [۳]): فرض می‌کنیم $f(t,x)$ یک تابع برداری پیوسته $n-$ بعدی روی مستطیل Q است

$$Q=\{(t,x): t_0 \le t \le t_0+a, \|x-x_0\| \le b\}$$

و در شرط لیپشیتس یکنواخت نسبت به x روی Q صدق می‌کند. فرض کنید

$$M=\max\{\|f(t,x)\| : (t,x) \in Q\},$$

و

$$\alpha=\min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

در این صورت دستگاه دیفرانسیل کسری $x'=f(t,x(t))$ دارای جواب یکتایی $x(t)$ روی $[t_0, t_0+\alpha]$ دارد. به علاوه

$$\|x(t)-x_0\| \le b, \qquad t \in [t_0, t_0+\alpha].$$

۳ وجود و یکتایی جواب برای دستگاه دیفرانسیل کسری پربهاکار

در این بخش یک دستگاه دیفرانسیل کسری مستقل خطی شامل مشتق کسری پربهاکار معرفی می‌کنیم و وجود و یکتایی جواب آن را بررسی می‌کنیم. دستگاه کسری زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &\mathsf{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+} x(t) = f(t,x(t)), \quad 0<\mu<1,\ t \in \mathbf{R}^n, \\ &\mathsf{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+} x(0^+) = x_0. \end{aligned} \tag{۱۳}$$

قضیه ۲. جواب های دستگاه کسری (۱۳) با شرایط اولیه بیان شده به صورت زیر است:

$$x(t)=x_0 t^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho}) + \int_0^t (t-u)^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho}) f(u,x(u))\,du. \tag{۱۴}$$

برهان: با به کاربردن عملگر لاپلاس L برای دو طرف (۱۳) و با استفاده از فرمول (۸) داریم:

$$X(s)=x_0\, s^{-\mu}(1-\omega s^{-\rho})^{-\gamma} + s^{-\mu}(1-\omega s^{-\rho})^{-\gamma} f(s,x(s)), \tag{۱۵}$$

با به کار بردن تبدیل لاپلاس معکوس برای دو طرف رابطه (۱۵) و در نظر گرفتن قضیه پیچش برای تبدیل لاپلاس و رابطه (۹) برای معادله اخیر حکم به دست می‌آید.

[۶] Lipschitz

قضیه ۲. فرض می‌کنیم $f(t,x)$ یک تابع برداری پیوسته $n-$ بعدی روی مستطیل Q است

$$Q=\{(t,x):0\leq t\leq a,\left\|x-x_0 t^{\mu-1}E_{\rho,\mu}^{\gamma}(\omega t^{\rho})\right\|\leq b\}$$

و در شرط لیپشیتس یکنواخت نسبت به x روی Q صدق می‌کند. فرض کنید

$$M=\max\{\|f(t,x)\|:(t,x)\in Q\},\ M_1=\max\{\left|E_{\rho,\mu}^{\gamma}(\omega t^{\rho})\right|:(t,x)\in Q\},$$

و

$$\alpha=\min\left\{a,\frac{b}{MM_1}\right\}$$

در این صورت دستگاه دیفرانسیل کسری (۱۳) جواب یکتایی $x(t)$ روی $[0,\alpha]$ دارد. به علاوه

$$\left\|x(t)-x_0 t^{\mu-1}E_{\rho,\mu}^{\gamma}(\omega t^{\rho})\right\|\leq b,\qquad t\in[0,\alpha].$$

برهان: برای اثبات کافی است نشان دهیم که معادله انتگرالی (۱۴) یک جواب روی $[0,\alpha]$ دارد. دنباله بازگشتی پیکارد $\{x_k\}$ روی $[0,\alpha]$ را برای $k=0,1,2,\ldots$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&x_0(t)=x_0 t^{\mu-1}E_{\rho,\mu}^{\gamma}(\omega t^{\rho}),\\&x_{k+1}(t)=x_0 t^{\mu-1}E_{\rho,\mu}^{\gamma}(\omega t^{\rho})+\int_0^t(t-u)^{\mu-1}E_{\rho,\mu}^{\gamma}(\omega(t-u)^{\rho})f(u,x_k(u))du,\quad t\in[0,\alpha],\end{aligned}\tag{۱۶}$$

با استقراء نشان می‌دهیم که هر دنباله بازگشتی پیکارد x_kروی $[0,\alpha]$ خوش تعریف و پیوسته است و هم چنین گراف آن در Q است. واضح است که $x_0(t)t^{\mu-1}E_{\rho,\mu}^{\gamma}(\omega t^{\rho})$ در این شرایط صدق می‌کند. فرض می‌کنیم که x_k خوش تعریف و پیوسته روی $[0,\alpha]$ و

$$\left\|x(t)-x_0 t^{\mu-1}E_{\rho,\mu}^{\gamma}(\omega t^{\rho})\right\|\leq b,\qquad t\in[0,\alpha].$$

لذا

$$x_{k+1}(t)=x_0 t^{\mu-1}E_{\rho,\mu}^{\gamma}(\omega t^{\rho})+\int_0^t(t-u)^{\mu-1}E_{\rho,\mu}^{\gamma}(\omega(t-u)^{\rho})f(u,x_k(u))du,\quad t\in[0,\alpha],$$

روی $[0,\alpha]$ خوش تعریف و پیوسته است. همچنین داریم:

$$\begin{aligned}\left\|x_{k+1}(t)-x_0 t^{\mu-1}E_{\rho,\mu}^{\gamma}(\omega t^{\rho})\right\|&\leq\int_0^t(t-u)^{\mu-1}E_{\rho,\mu}^{\gamma}(\omega(t-u)^{\rho})\left|f(u,x_k(u))\right|du\\&\leq M\int_0^t(t-u)^{\mu-1}E_{\rho,\mu}^{\gamma}(\omega(t-u)^{\rho})du,\end{aligned}\tag{۱۷}$$

که از رابطه (۱۰) و $\alpha^{\mu}\leq\alpha$، نتیجه می‌شود:

$$\left\|x_{k+1}(t)-x_0 t^{\mu-1}E_{\rho,\mu}^{\gamma}(\omega t^{\rho})\right\|\leq M\alpha^{\mu}E_{\rho,\mu+1}^{\gamma}(\omega t^{\rho})\leq MM_1\alpha\leq b,$$

در نهایت برای $t\in[0,\alpha]$ استقراء کامل می‌شود. فرض می‌کنیم K ثابت لیپشیتس برای تابع $f(t,x)$ نسبت به x روی Q باشد. اکنون با استقراء ثابت می‌کنیم که

$$\|x_{k+1}(t)-x_k(t)\| \le MK^k t^{(k+1)\mu} E^{(k+1)\gamma}_{\rho,(k+1)\mu+1}(\omega t^\rho),\ t\in[0,\alpha], k=0,1,2,\ldots \tag{۱۸}$$

واضح است برای $k=0$ رابطه (۱۸) برقرار است. برای k ثابت، $k\ge 1$ فرض می‌کنیم رابطه (۱۸) برای $k-1$ درست است. با به کاربردن شرط لیپشیتس و فرض استقراء، داریم:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1}(t)-x_k(t)\| &= \left\|\int_0^t (t-u)^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^\rho)(f(u,x_k(u))-f(u,x_{k-1}(u)))du\right\| \\ &\le \int_0^t (t-u)^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^\rho)\|f(u,x_k(u))-f(u,x_{k-1}(u))\|\,du \\ &\le K\int_0^t (t-u)^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^\rho)\|x_k(u)-x_{k-1}(u)\|\,du \\ &\le MK^k\int_0^t (t-u)^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^\rho)u^{k\mu}E^{\gamma}_{\rho,k\mu+1}(\omega u^\rho)du \\ &= MK^k t^{(k+1)\mu}E^{(k+1)\gamma}_{\rho,(k+1)\mu+1}(\omega t^\rho), \qquad t\in[0,\alpha],\end{aligned}$$

و اثبات (۱۸) کامل می‌شود. دنباله مجموع جزئی سری

$$x_0(t)+\sum_{m=0}^{\infty}(x_{m+1}(t)-x_m(t)), \tag{۱۹}$$

به صورت زیر است:

$$\{x_0(t)+\sum_{m=0}^{k-1}(x_{m+1}(t)-x_m(t))\}=\{x_k(t)\}.$$

بنابراین می‌توان نشان داد که دنباله بازگشتی پیکارد $\{x_k(t)\}$ روی بازه $[0,\alpha]$ به طور یکنواخت همگرا است. با نشان دادن این که سری نامتناهی (۱۹) روی بازه $[0,\alpha]$ به طوریکنواخت همگرا است. توجه می‌کنیم که

$$\|x_{m+1}(t)-x_m(t)\|\le \frac{M}{K}(t^\mu K)^{k+1}E^{(k+1)\gamma}_{\rho,(k+1)\mu+1}(\omega t^\rho), \qquad t\in[0,\alpha],$$

و سری

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{M}{K}(t^\mu K)^{k+1}E^{(k+1)\gamma}_{\rho,(k+1)\mu+1}(\omega t^\rho),$$

همگرا است، با استفاده از آزمون نسبت می‌توان همگرایی مطلق آن را به دست آورد. بنابراین طبق آزمون $M-$ وایراشتراس سری نامتناهی (۱۹) روی بازه $[0,\alpha]$ به طوریکنواخت همگرا است. لذا دنباله بازگشتی پیکارد $\{x_k(t)\}$ روی بازه $[0,\alpha]$ به طوریکنواخت همگرا است. فرض کنیم

$$x(t)=\lim_{k\to\infty}x_k(t), \qquad t\in[0,\alpha],$$

چون تابع $f(t,x)$ در شرط لیپشیتس صدق می‌کند پس داریم:

$$\|f(t,x_k(t))-f(t,x(t))\|\le K\,\|x_k(t)-x(t)\|, \quad t\in[0,\alpha],$$

بنابراین

$$\lim_{k\to\infty} f(t,x_k(t)) = f(t,x(t)),\quad t\in[\cdot,\alpha],$$

با به کاربردن حد از دو طرف رابطه (۱۶) داریم:

$$x(t) = x_{\cdot} t^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho}) + \int_{\cdot}^{t} (t-u)^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho}) f(u,x(u))du,\qquad t\in[\cdot,\alpha],$$

بنابراین $x(t)$ جوابی از دستگاه دیفرانسیل کسری (۱۳) است. برای تکمیل اثبات، اثبات یکتایی جواب دستگاه دیفرانسیل کسری (۱۳) باقی مانده است. فرض می‌کنیم $y(t)$ جوابی از دستگاه دیفرانسیل کسری (۱۳) که $\cdot<\beta\le\alpha$ روی $[\cdot,\alpha]$ باشد. نشان می‌دهیم $y(t)=x(t)$. چون $y(t)$ به عنوان جوابی از دستگاه دیفرانسیل کسری (۱۳) است بنابراین داریم:

$$y(t) = x_{\cdot} t^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho}) + \int_{\cdot}^{t} (t-u)^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho}) f(u,y(u))du,\qquad t\in[\cdot,\beta],$$

از این رو به طور مشابه می‌توان با استقراء ثابت کرد:

$$\|y(t)-x_k(t)\| \le MK^{k} t^{(k+1)\mu} E^{(k+1)\gamma}_{\rho,(k+1)\mu+1}(\omega t^{\rho}),\ t\in[\cdot,\beta], k=\cdot,1,2,\ldots \tag{۲۰}$$

بنابراین داریم:

$$y(t) = \lim_{k\to\infty} x_k(t) = x(t),\ t\in[\cdot,\beta].$$

نتیجه ۱. فرض می‌کنیم فرضیات قضیه ۳ برقرار باشد و $\{x_k(t)\}$ دنباله بازگشتی پیکارد در اثبات قضیه ۳ باشد. اگر $x(t)$ جوابی از دستگاه دیفرانسیل کسری (۱۳) باشد، پس

$$\|x(t)-x_k(t)\| \le MK^{k} t^{(k+1)\mu} E^{(k+1)\gamma}_{\rho,(k+1)\mu+1}(\omega t^{\rho}),\ t\in[\cdot,\alpha], k=\cdot,1,2,\ldots \tag{۲۱}$$

که K ثابت لیپشیتس برای تابع $f(t,x)$ نسبت به x روی Q است.

نتیجه ۲. فرض می‌کنیم $D\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ یک زیرمجموعه باز، $f:D\to\mathbf{R}^n$ یک تابع پیوسته و $\mathsf{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+} f(t,x)$ ماتریس ژاکوبین روی مجموعه باز D پیوسته باشد. پس برای $(t_{\cdot},x_{\cdot})\in D$ مسئله مقدار اولیه (۱۳) یک جواب یکتا بر روی یک بازه شامل t_0 داخل آن دارد.

برهان: چون D یک مجوعه باز و $(t_{\cdot},x_{\cdot})\in D$ است بنابراین اعداد مثبت a,b وجود دارد به طوری که:

$$R=\{(t,x): \cdot\le|t-t_{\cdot}|\le a, \|x-x_{\cdot}\|_1\le b\}\subset D. \tag{۲۲}$$

از طرفی تابع $f(t,x)$ در شرط لیپشیتس نسبت به x روی $\mathbf{R}$ با ثابت لیپشیتس

$$K=\max\{\|\mathsf{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+} f(t,x)\| : (t,x)\in R\}, \tag{۲۳}$$

صدق می‌کند. حالا با در نظر گرفتن $\mathbf{R}=Q$ و

$$M=\max\{\|f(t,x)\| : (t,x)\in Q\},\ M_1=\max\{|E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho})| : (t,x)\in Q\},$$

همچنین

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{MM_۱}\right\}$$

با استفاده از قضیه پیکارد–لیندلف مسئله (۱۳) درای جواب یکتا می‌باشد.

۴ مثال

جواب‌های دستگاه دیفرانسیل کسری با مقدار اولیه به صورت زیر را با پیدا کردن دنباله بازگشتی پیکارد دوم یعنی $x_۲(t)$ تقریب می‌زنیم

$$\begin{aligned} &\mathsf{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,۰^+} x(t) = x(t) + ۱, \quad ۰ < \mu < ۱, \ t \in \mathbf{R}^n, \\ &\mathsf{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,۰^+} x(۰^+) = ۰. \end{aligned} \tag{۲۴}$$

با استفاده از رابطه (۲۱) یک تقریب خوبی برای این دنباله به دست می‌آوریم. اول دنباله بازگشتی پیکارد اول $x_۱(t)$ را با با قرار دادن $k = 0$ در (۱۶) به دست می‌آوریم پس داریم:

$$\begin{aligned} &x_۰(t) = ۰, \\ &x_۱(t) = \int_۰^t (t-u)^{\mu-۱} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})(x_۰(u)+۱)\,du \\ &\qquad = t^{\mu} E^{\gamma}_{\rho,\mu+۱}(\omega t^{\rho}), \quad t \in [۰,\alpha], \end{aligned} \tag{۲۵}$$

حالا با قرار دادن $k = 1$ در رابطه (۱۶) دنباله بازگشتی پیکارد دوم $x_۲(t)$ را به دست می‌آوریم که به صورت زیر بیان می-شود:

$$\begin{aligned} &x_۱(t) = t^{\mu} E^{\gamma}_{\rho,\mu+۱}(\omega t^{\rho}), \\ &x_۲(t) = \int_۰^t (t-u)^{\mu-۱} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})(u^{\mu} E^{\gamma}_{\rho,\mu+۱}(\omega u^{\rho})+۱)\,du \\ &\qquad = t^{۲\mu} E^{۲\gamma}_{\rho,۲\mu+۱}(\omega t^{\rho}) + t^{\mu} E^{\gamma}_{\rho,\mu+۱}(\omega t^{\rho}), \ t \in [۰,\alpha]. \end{aligned} \tag{۲۶}$$

می‌بینیم که چطور می‌توانیم تقریب بهتری با استفاده از دنباله بازگشتی پیکارد به دست آوریم. حالا ما استفاده می‌کنیم از رابطه (۲۱) و به دست می‌آوریم

$$\|x(t) - x_۲(t)\| \le MK^۲ t^{۳\mu} E^{۳\gamma}_{\rho,۳\mu+۱}(\omega t^{\rho}), \ t \in [۰,\alpha]. \tag{۲۷}$$

مراجع:

[1] H. Askari, A. Ansari, Fractional calculus of variations with a generalized fractional derivative, Calculus of variations, 7 (2016) 9.

[2] W.G. Kelly, A.C. Peterson, The Theory of Differential Equations, Springer, Dordrecht, Heidelberg, London, 2010.

[3] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[4] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, 1999.

[5] M. Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas, A. Ouahab, Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay, J. Math. Anal. Appl., 338 (2008) 1340-1350.

[6] Y. Zhou, Existence and uniqueness of fractional functional differential equations with unbounded delay, Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ., 1 (2008) 239-244.

[7] R. Garra, R. Gorenflo, F. Polito, Ž. Tomovski, Hilfer-prabhakar derivatives and some applications, Appl. Math. Comput., 242 (2014) 576-589.

[8] T.R. Prabhakar, A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel, Yokohama. Math. J., 19 (1971) 7-15.