Complex and Nonlinear Systems
Vol. 1, No. 1, Autumn 2017, pp. 55-62

سیستم‌های مختلط و غیرخطی
سال ۱، دوره ۱، شماره ۱، پاییز ۱۳۹۶، صص ۵۵ تا ۶۲

روش پیکارد–لیندلف برای مسائل مقدار اولیه با مشتق کسری پربهاکار

محمدحسین درخشان[۱]، علیرضا انصاری[۲،*]، ندا آهنجیده[۳]

۱. دانشجوی دکتری، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد
۲. دانشیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد
۳. دانشیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۴/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۶/۰۸

Picard-Lindelof method for initial value problems with Prabhakar fractional derivative

Mohammad Hossein Derakhshan[1,*], Alireza Ansari[2], Neda Ahanjideh[3]

1. PhD Candidate, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrekord University
2. Associate Professor, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrekord University
3. Associate Professor, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrekord University

Received: 7/10/2017 Accepted: 8/30/2017

چکیده: در این مقاله، یک دستگاه دیفرانسیل کسری برحسب مشتق کسری پربهاکار را معرفی می‌کنیم و با به‌کاربردن تبدیل لاپلاس جواب این دستگاه کسری را برحسب تابع متیگ–لفلر سه‌پارامتری به‌دست می‌آوریم. برای به‌دست آوردن وجود و یکتایی جواب این دستگاه کسری، جواب را برحسب یک دنباله بازگشتی نوشته و با استفاده از قضیه پیکارد–لیندلف وجود و یکتایی جواب این دستگاه کسری را اثبات می‌کنیم. در نهایت با استفاده از قضیه بیان شده در مقاله، یک مثال را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: مشتق کسری پربهاکار، وجود و یکتایی، روش پیکارد–لیندلف، تابع میتگ–لفلر.

Abstract: In this paper, we introduce a system of fractional differential equations in the sense of the Prabhakar fractional derivative and by applying the Laplace transform we get the solution of the system with respect to the Mittag-Leffler function with three parameters. For obtaining the existence and uniqueness of the solution, we construct the sequence of iterates for the solution and by using the Picard-Lindelof theorem, we prove the existence and uniqueness of the solution of the system. Finally, we give an example by using the stated theorem.

Keywords: Prabhakar fractional derivative, Existence and uniqueness, Picard-Lindelof method, Mittag-Leffler function.

۱ مقدمه

در دهه‌های اخیر، نظریه حساب کسری و دستگاه‌های دیفرانسیل کسری در علوم کاربردی و مهندسی مورد توجه بسیاری از دانشمندان قرار گرفته است. بعضی از جنبه‌های ریاضی و کاربردی را می‌توان به [۱–۴] و منابع مربوط به آن اشاره کرد. در این مقاله ما یک دستگاه دیفرانسیل شامل مشتق کسری به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{D}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < \alpha < 1, \; t \in \mathbf{R}^n, \qquad (1)$$

Corresponding author: alireza_1038@yahoo.com
*نویسنده مسئول

که عملگر D^{α} یک عملگر کسری برحسب مشتق کسری از مرتبه α و $f(t,x)$ یک تابع برداری پیوسته است. در این مقاله وجود و یکتایی دستگاه دیفرانسیل کسری یکی از مهم‌ترین اهداف تحقیق است. وجود و یکتایی برای یک مسئله مقدار اولیه برای یک معادله دیفرانسیل مرتبه کسری در [۵, ۶] مطالعه شده است. در اینجا قصد داریم با جایگزین کردن یک مشتق تعمیم یافته به جای D^{α} به بررسی وجود و یکتایی جواب این دستگاه کسری با استفاده از قضیه پیکارد- لیندلف بپردازیم. مشتق کسری بیان شده D^{α} با جایگزین کردن یک تابع سه پارامتری به‌جای هسته مشتق کسری ریمان- لیوویل به‌دست می‌آید. به این تابع سه پارامتری تابع متیگ-لفلر می‌گویند و به D^{α} مشتق کسری پربهاکار گفته می‌شود که توسط پربهاکار مطرح شده است [۷, ۸]. اکنون قصد داریم نوعی از مشتق کسری به نام مشتق کسری پربهاکار را بیان کنیم و در مورد دستگاه (۱) شامل این مشتق کسری، وجود و یکتایی جواب این دستگاه را با استفاده قضیه پیکارد- لیندلف اثبات کنیم. برای این هدف، در فصل ۲ به بیان تعاریف و مقدمات مورد نیاز می‌پردازیم که در بخش‌های بعدی از آنها استفاده می‌کنیم. در فصل ۳ وجود و یکتایی این دستگاه کسری را با استفاده از قضیه پیکارد- لیندلف مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در فصل ۴ با یک مثال به تفسیر وجود و یکتایی آن با استفاده از قضیه پیکارد-لیندلف خواهیم پرداخت.

۲ تعاریف و مقدمات

تعریف ۱. (کیلباس و همکاران [۲]): فرض کنیم $f \in L^{1}(0,b)$ و $0<t<b\leq+\infty$، در این صورت انتگرال و مشتق کسری ریمان-لیوویل[1] از مرتبه α به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ {}_{0^+}I_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(u)(t-u)^{\alpha-1}du,\ t>0,\quad 0<\alpha<1, \tag{۲}$$

$$ {}_{0^+}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(u)(t-u)^{-\alpha}du,\quad t>0, 0<\alpha<1. \tag{۳}$$

همچنین برای تابع به‌طور مطلق پیوسته f، مشتق کسری کپوتو[2] از مرتبه α به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ \begin{aligned} {}_{0^+}^{C}D_t^{\alpha} f(t) &= {}_{0^+}I_t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-u)^{-\alpha}\frac{d}{du}f(u)du. \end{aligned} \tag{۴}$$

تعریف ۲. (پربهاکار [۸]): فرض کنیم $f \in L^{1}(0,b)$ و $0<t<b\leq+\infty$، در این صورت انتگرال کسری پربهاکار به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ \begin{aligned} &(E^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+}f)(t) \\ &= \int_0^t (t-u)^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})f(u)du. \end{aligned} \tag{۵}$$

که $E^{\gamma}_{\rho,\mu}$ تابع متیگ-لفلر تعمیم یافته است که در سال ۱۹۷۱ توسط پربهاکار معرفی شده است:

$$ E^{\gamma}_{\rho,\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+n)}{n!\Gamma(\rho n+\mu)}z^{n}. \tag{۶}$$

[1] Riemann–Liouville
[2] Caputo

تعریف ۳. (پربهاکار [۸]): فرض کنیم $f \in L^1(0,b)$ و $0<t<b\le+\infty$، در این صورت مشتق کسری پربهاکار به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\mathrm{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+}f)(t)=\frac{d}{dt}\mathrm{E}^{-\gamma}_{\rho,1-\mu,\omega,0^+}f(t),t>0, \quad (۷)$$

که $0<\mu<1$ و $\rho,\mu,\omega,\gamma\in\mathbf{C}$.

لم ۱. (پربهاکار [۸]): تبدیل لاپلاس مشتق کسری پربهاکار برای $0<\mu<1$ به‌صورت زیر داده شده است:

$$\begin{aligned}&\mathrm{L}\{\mathrm{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+}f(t);s\}\\&=s^{\mu}(1-\omega s^{-\rho})^{\gamma}F(s)-\mathrm{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+}f(0^+),\end{aligned} \quad (۸)$$

که $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است که به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt.$$

لم ۲. (پربهاکار [۸]): تبدیل لاپلاس تابع متیگ-لفلر تعمیم یافته $t^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho})$ به‌صورت زیر داده شده است:

$$\begin{aligned}&\mathrm{L}\{t^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho});s\}\\&=\frac{s^{\rho\gamma-\mu}}{(s^{\rho}-\omega)^{\gamma}},\ \left|\frac{\omega}{s^{\rho}}\right|<1.\end{aligned} \quad (۹)$$

لم ۳. (کیلباس و همکاران [۲]): فرض می‌کنیم $\rho,\mu,\omega,\gamma\in\mathbf{C}(\mathrm{Re}(\rho),\mathrm{Re}(\mu)>0)$. پس

$$\int_0^t u^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega u^{\rho})du=t^{\mu}E^{\gamma}_{\rho,\mu+1}(\omega t^{\rho}). \quad (۱۰)$$

لم ۴. (کیلباس و همکاران [۲]): فرض می‌کنیم $\rho,\mu,\omega,\gamma\in\mathbf{C}(\mathrm{Re}(\rho),\mathrm{Re}(\mu)>0)$. پس:

$$\begin{aligned}&\int_0^t(t-u)^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})u^{\nu-1}E^{\sigma}_{\rho,\nu}(\omega u^{\rho})du\\&=t^{\mu+\nu-1}E^{\gamma+\sigma}_{\rho,\nu+\mu}(\omega t^{\rho}).\end{aligned} \quad (۱۱)$$

تعریف ۴. یک تابع برداری $f:D\to\mathbf{R}^n$ در شرط لیپشیتس نسبت به x روی هر مجموعه باز $D\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ برای هر مستطیل

$$Q=\{(t,x):0\le t\le a,\|x-x_0\|\le b\}\subset D,$$

صدق می‌کند، اگر برای تمام $(t,x),(t,y)\in Q$ یک ثابت K_Q که ممکن است وابسته به مجموعه Q باشد، وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\le K_Q\|x-y\|. \quad (۱۲)$$

تعریف ۵. یک تابع برداری $f:D\to\mathbf{R}^n$ در شرط لیپشیتس[1] یکنواخت نسبت به x روی هر مجموعه باز $D\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ صدق می‌کند اگر برای تمام $(t,x),(t,y)\in Q$ یک ثابت K وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\le K\|x-y\|,$$

که ثابت K را ثابت لیپشیتس می‌نامند.

قضیه ۱. (کیلباس و همکاران [۳]): فرض می‌کنیم $f(t,x)$ یک تابع برداری پیوسته n-بعدی روی مستطیل Q است:

$$Q=\{(t,x):t_0\le t\le t_0+a,\|x-x_0\|\le b\}$$

و در شرط لیپشیتس یکنواخت نسبت به x روی Q صدق می‌کند. فرض کنید

$$M=\max\{\|f(t,x)\|:(t,x)\in Q\},$$

و

[1] Lipschitz

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

در این صورت دستگاه دیفرانسیل کسری $x' = f(t, x(t))$ جواب یکتای $x(t)$ روی $[t_0, t_0 + \alpha]$ دارد. به‌علاوه،

$$\|x(t) - x_0\| \le b, \qquad t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

۳ وجود و یکتایی جواب برای دستگاه دیفرانسیل کسری پربهاکار

در این بخش یک دستگاه دیفرانسیل کسری مستقل خطی شامل مشتق کسری پربهاکار معرفی می‌کنیم و وجود و یکتایی جواب آن را بررسی می‌کنیم. دستگاه کسری زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+} x(t) = f(t, x(t)), \\ &\qquad 0 < \mu < 1,\ t \in \mathbf{R}^n, \\ &\mathrm{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+} x(0^+) = x_0. \end{aligned} \tag{۱۳}$$

قضیه ۲. جواب‌های دستگاه کسری (۱۳) با شرایط اولیه بیان شده به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 t^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho}) \\ &+ \int_0^t (t-u)^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega (t-u)^{\rho}) f(u, x(u))\, du. \end{aligned} \tag{۱۴}$$

برهان: با به کاربردن عملگر لاپلاس L برای دو طرف (۱۳) و با استفاده از فرمول (۸) داریم:

$$\begin{aligned} X(s) &= x_0 s^{-\mu}(1 - \omega s^{-\rho})^{-\gamma} \\ &+ s^{-\mu}(1 - \omega s^{-\rho})^{-\gamma} f(s, x(s)), \end{aligned} \tag{۱۵}$$

با به‌کاربردن تبدیل لاپلاس معکوس برای دو طرف رابطه (۱۵) و در نظر گرفتن قضیه پیچش برای تبدیل لاپلاس و رابطه (۹) برای معادله اخیر حکم به‌دست می‌آید.

قضیه ۳. فرض می‌کنیم $f(t, x)$ یک تابع برداری پیوسته n-بعدی روی مستطیل Q است:

$$Q = \left\{(t, x) : 0 \le t \le a, \left\|x - x_0 t^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho})\right\| \le b\right\}$$

و در شرط لیپشیتس یکنواخت نسبت به x روی Q صدق می‌کند. فرض کنید

$$\begin{aligned} M &= \max\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in Q\},\ M_1 \\ &= \max\{\left|E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho})\right| : (t, x) \in Q\}, \end{aligned}$$

و

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{MM_1}\right\}.$$

در این صورت دستگاه دیفرانسیل کسری (۱۳) جواب یکتایی $x(t)$ روی $[0, \alpha]$ دارد. به‌علاوه،

$$\left\|x(t) - x_0 t^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho})\right\| \le b, \qquad t \in [0, \alpha].$$

برهان: برای اثبات کافی است نشان دهیم که معادله انتگرالی (۱۴) یک جواب روی $[0, \alpha]$ دارد. دنباله بازگشتی پیکارد $\{x_k\}$ روی $[0, \alpha]$ را برای $k = 0, 1, 2, \ldots$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 t^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho}), \\ x_{k+1}(t) &= x_0 t^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho}) \\ &+ \int_0^t (t-u)^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega (t-u)^{\rho}) f(u, x_k(u))\, du, \\ &\qquad t \in [0, \alpha], \end{aligned} \tag{۱۶}$$

با استقراء نشان می‌دهیم که هر دنباله بازگشتی پیکارد x_k روی $[0, \alpha]$ خوش‌تعریف و پیوسته است و همچنین گراف آن در Q است. واضح است که

$x_0(t)t^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho})$ در این شرایط صدق می‌کند. فرض می‌کنیم که x_k خوش‌تعریف و پیوسته روی $[0,\alpha]$ باشد و

$$\left\|x(t)-x_0t^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho})\right\|\le b,\quad t\in[0,\alpha].$$

لذا

$$x_{k+1}(t)=x_0t^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho})+\int_0^t(t-u)^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})f(u,x_k(u))du,\quad t\in[0,\alpha],$$

روی $[0,\alpha]$ خوش‌تعریف و پیوسته است. همچنین داریم:

$$\begin{aligned}&\left\|x_{k+1}(t)-x_0t^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho})\right\|\\&\le\int_0^t(t-u)^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})\left|f(u,x_k(u))\right|du\\&\le M\int_0^t(t-u)^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})du,\end{aligned}\tag{۱۷}$$

که از رابطه (۱۰) و $\alpha^{\mu}\le\alpha$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}&\left\|x_{k+1}(t)-x_0t^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho})\right\|\\&\le M\ \alpha^{\mu}E^{\gamma}_{\rho,\mu+1}(\omega t^{\rho})\\&\le MM_1\alpha\le b,\end{aligned}$$

در نهایت برای $t\in[0,\alpha]$ استقراء کامل می‌شود. فرض می‌کنیم K ثابت لیپشیتس برای تابع $f(t,x)$ نسبت به x روی Q باشد. اکنون با استقراء ثابت می‌کنیم که

$$\begin{aligned}&\left\|x_{k+1}(t)-x_k(t)\right\|\\&\le MK^kt^{(k+1)\mu}E^{(k+1)\gamma}_{\rho,(k+1)\mu+1}(\omega t^{\rho}),\\&t\in[0,\alpha],k=0,1,2,\ldots\end{aligned}\tag{۱۸}$$

واضح است که برای $k=0$ رابطه (۱۸) برقرار است. برای ثابت $k\ge1$، k فرض می‌کنیم رابطه (۱۸) برای $k-1$ درست است. با به کاربردن شرط لیپشیتس و فرض استقراء داریم:

$$\begin{aligned}\left\|x_{k+1}(t)-x_k(t)\right\|&=\left\|\int_0^t(t-u)^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})(f(u,x_k(u))-f(u,x_{k-1}(u)))du\right\|\\&\le\int_0^t(t-u)^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})\left\|f(u,x_k(u))-f(u,x_{k-1}(u))\right\|du\\&\le K\int_0^t(t-u)^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})\left\|x_k(u)-x_{k-1}(u)\right\|du\\&\le MK^k\int_0^t(t-u)^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})u^{k\mu}E^{\gamma}_{\rho,k\mu+1}(\omega u^{\rho})du\\&=MK^kt^{(k+1)\mu}E^{(k+1)\gamma}_{\rho,(k+1)\mu+1}(\omega t^{\rho}),\qquad t\in[0,\alpha],\end{aligned}$$

و اثبات (۱۸) کامل می‌شود. دنباله مجموع جزئی سری

$$x_0(t)+\sum_{m=0}^{\infty}(x_{m+1}(t)-x_m(t)),\tag{۱۹}$$

به‌صورت زیر است:

$$\{x_0(t)+\sum_{m=0}^{k-1}(x_{m+1}(t)-x_m(t))\}=\{x_k(t)\}.$$

بنابراین می‌توان نشان داد که دنباله بازگشتی پیکارد $\{x_k(t)\}$ روی بازه $[0,\alpha]$ به‌طور یکنواخت همگرا است (با نشان دادن اینکه سری نامتناهی (۱۹) روی بازه

$[0,\alpha]$ به‌طور یکنواخت همگرا است). با توجه به برقراری نامساوی

$$\|x_{m+1}(t)-x_m(t)\| \le \frac{M}{K}(t^{\mu}K)^{k+1}E^{(k+1)\gamma}_{\rho,(k+1)\mu+1}(\omega t^{\rho}), \quad t\in[0,\alpha],$$

و همگرایی سری

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{M}{K}(t^{\mu}K)^{k+1}E^{(k+1)\gamma}_{\rho,(k+1)\mu+1}(\omega t^{\rho}),$$

با استفاده از آزمون نسبت می‌توان همگرایی مطلق آن را به‌دست آورد. بنابراین طبق آزمون M-وایراشتراس، سری نامتناهی (۱۹) روی بازه $[0,\alpha]$ به‌طور یکنواخت همگرا است. لذا دنباله بازگشتی پیکارد $\{x_k(t)\}$ روی بازه $[0,\alpha]$ به‌طور یکنواخت همگرا است. فرض کنیم

$$x(t)=\lim_{k\to\infty}x_k(t), \quad t\in[0,\alpha].$$

چون تابع $f(t,x)$ در شرط لیپشیتس صدق می‌کند، پس داریم:

$$\|f(t,x_k(t))-f(t,x(t))\| \le K\|x_k(t)-x(t)\|, \quad t\in[0,\alpha],$$

بنابراین

$$\lim_{k\to\infty}f(t,x_k(t))=f(t,x(t)), \quad t\in[0,\alpha],$$

با حدگیری از دو طرف رابطه (۱۶) داریم:

$$x(t)=x_0t^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho}) +\int_0^t(t-u)^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})f(u,x(u))du, \quad t\in[0,\alpha].$$

بنابراین $x(t)$ جوابی از دستگاه دیفرانسیل کسری (۱۳) است. برای تکمیل اثبات، اثبات یکتایی جواب دستگاه دیفرانسیل کسری (۱۳) باقی مانده است. فرض می‌کنیم $y(t)$ جوابی از دستگاه دیفرانسیل کسری (۱۳) که $0<\beta\le\alpha$ روی $[0,\alpha]$ باشد. نشان می‌دهیم $y(t)=x(t)$. چون $y(t)$ به عنوان جوابی از دستگاه دیفرانسیل کسری (۱۳) است، بنابراین داریم:

$$y(t)=x_0t^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho}) +\int_0^t(t-u)^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})f(u,y(u))du, \quad t\in[0,\beta],$$

از این رو به‌طور مشابه می‌توان با استقراء ثابت کرد:

$$\|y(t)-x_k(t)\| \le MK^kt^{(k+1)\mu}E^{(k+1)\gamma}_{\rho,(k+1)\mu+1}(\omega t^{\rho}), \quad t\in[0,\beta], k=0,1,2,\ldots \tag{۲۰}$$

بنابراین داریم:

$$y(t)=\lim_{k\to\infty}x_k(t)=x(t), t\in[0,\beta]. \qquad \square$$

نتیجه ۱. فرض می‌کنیم فرضیات قضیه ۳ برقرار باشد و $\{x_k(t)\}$ دنباله بازگشتی پیکارد در اثبات قضیه ۳ باشد. اگر $x(t)$ جوابی از دستگاه دیفرانسیل کسری (۱۳) باشد، پس

$$\|x(t)-x_k(t)\| \le MK^kt^{(k+1)\mu}E^{(k+1)\gamma}_{\rho,(k+1)\mu+1}(\omega t^{\rho}), \quad t\in[0,\alpha], k=0,1,2,\ldots \tag{۲۱}$$

که K ثابت لیپشیتس برای تابع $f(t,x)$ نسبت به x روی Q است.

نتیجه ۲. فرض می‌کنیم $D\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ یک زیرمجموعه باز، $f:D\to\mathbf{R}^n$ یک تابع پیوسته و $\mathrm{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+}f(t,x)$ ماتریس ژاکوبین روی مجموعه باز D پیوسته باشد. پس برای $(t_0,x_0)\in D$ مسئله مقدار اولیه (۱۳) یک جواب یکتا بر روی یک بازه شامل t_0 داخل آن دارد.

برهان: چون D یک مجموعه باز و $(t_0,x_0)\in D$ است، بنابراین اعداد مثبت a,b وجود دارد به‌طوری‌که:

$$R=\{(t,x):0\le|t-t_0|\le a,\|x-x_0\|_1\le b\}\subset D.$$

از طرفی تابع $f(t,x)$ در شرط لیپشیتس نسبت به x روی $\mathbf{R}$ با ثابت لیپشیتس

$$K=\max\left\{\left\|\mathrm{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+}f(t,x)\right\|:(t,x)\in R\right\},$$

صدق می‌کند. حالا با در نظر گرفتن $\mathbf{R}=Q$ و

$$M=\max\{\|f(t,x)\|:(t,x)\in Q\},\ M_1=\max\{|E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho})|:(t,x)\in Q\},$$

همچنین

$$\alpha=\min\left\{a,\frac{b}{MM_1}\right\},$$

با استفاده از قضیه پیکارد-لیندلف مسئله (۱۳) درای جواب یکتا می‌باشد. □

۴ مثال

جواب‌های دستگاه دیفرانسیل کسری با مقدار اولیه به‌صورت زیر را با پیدا کردن دنباله بازگشتی پیکارد دوم، یعنی $x_2(t)$ تقریب می‌زنیم:

$$\mathrm{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+}x(t)=x(t)+1,\quad 0<\mu<1,\ t\in\mathbf{R}^n,$$
$$\mathrm{D}^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0^+}x(0^+)=0.$$

با استفاده از رابطه (۲۱) تقریب خوبی برای این دنباله به‌دست می‌آوریم. اول دنباله بازگشتی پیکارد اول $x_1(t)$ را با قرار دادن $k=0$ در (۱۶) به‌دست می‌آوریم؛ پس داریم:

$$x_0(t)=0,$$
$$x_1(t)=\int_0^t(t-u)^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})(x_0(u)+1)du$$
$$=t^{\mu}E^{\gamma}_{\rho,\mu+1}(\omega t^{\rho}),\quad t\in[0,\alpha],$$

حالا با قرار دادن $k=1$ در رابطه (۱۶) دنباله بازگشتی پیکارد دوم $x_2(t)$ را به‌دست می‌آوریم که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$x_1(t)=t^{\mu}E^{\gamma}_{\rho,\mu+1}(\omega t^{\rho}),$$
$$x_2(t)$$
$$=\int_0^t(t-u)^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega(t-u)^{\rho})(u^{\mu}E^{\gamma}_{\rho,\mu+1}(\omega u^{\rho})+1)du$$
$$=t^{2\mu}E^{2\gamma}_{\rho,2\mu+1}(\omega t^{\rho})+t^{\mu}E^{\gamma}_{\rho,\mu+1}(\omega t^{\rho}),\ t\in[0,\alpha].$$

می‌بینیم که چطور می‌توانیم تقریب بهتری با استفاده از دنباله بازگشتی پیکارد به‌دست آوریم. حالا با استفاده از رابطه (۲۱) به‌دست می‌آوریم

$$\|x(t)-x_2(t)\|\le MK^2t^{3\mu}E^{3\gamma}_{\rho,3\mu+1}(\omega t^{\rho}),\quad t\in[0,\alpha].$$

References

[1] H. Askari, A. Ansari, Fractional calculus of variations with a generalized fractional derivative, Calculus of variations, 7 (2016) 9.

[2] W.G. Kelly, A.C. Peterson, The Theory of Differential Equations, Springer, Dordrecht, Heidelberg, London, 2010.

[3] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[4] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, 1999.

[5] M. Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas, A. Ouahab, Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay, J. Math. Anal. Appl., 338 (2008) 1340-1350.

[6] Y. Zhou, Existence and uniqueness of fractional functional differential equations with unbounded delay, Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ., 1 (2008) 239-244.

[7] R. Garra, R. Gorenflo, F. Polito, Ž. Tomovski, Hilfer-prabhakar derivatives and some applications, Appl. Math. Comput., 242 (2014) 576-589.

[8] T.R. Prabhakar, A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel, Yokohama. Math. J., 19 (1971) 7-15.