Complex and Nonlinear Systems
Vol. 1, No. 1, Autumn 2017, pp. 1-10

سیستم‌های مختلط و غیرخطی
سال ۱، دوره ۱، شماره ۱، پاییز ۱۳۹۶، صص ۱ تا ۱۰

محاسبه قوانین پایستاری معادلات ماکسول با استفاده از روش شبه‌خودالحاقی

مسعود سبزواری[۱،*]، علی مهدیفر[۲]، مژده محمدرحیم‌پناه[۳]

۱. استادیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد
۲. دانشیار، گروه فیزیک، دانشگاه شهرکرد
۳. دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه فیزیک، دانشگاه شهرکرد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۲/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۴/۲۳

Computation of conservation laws associated with the Maxwell equations by means of the quasi self adjoint method

Masoud Sabzevari[1,*], Ali Mahdifar[2], Mozhdeh Mohammad Rahimpanah[3]

1. Assistant Professor, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrekord University
2. Associate Professor, Department of Physics, Shahrekord University
3. MSc student, Department of Physics, Shahrekord University

Received: 5/5/2017 Accepted: 7/14/2017

Abstract: In this paper and by applying the *quasi self adjoint* method, introduced by Ibragimov in 2011, we construct some conservation laws of the Maxwell equations in vacuum. Notice that since the number of equations is not equal to that of the unknowns in this system, one never finds any certain Lagrangian associated to it. Nevertheless, by omitting two equations, one receives a certain reduced system of differential equations having quasi self adjointness and appropriate to apply Ibragimov's method for constructing its associated conservations laws without necessitating any Lagrangian. This subsequently gives as well some conservation laws of the Maxwell equations. It may be worth to notice that Ibragimov, himself, has computed some conservation laws of the Maxwell equations by means of the *self adjoint* method in 2009. Nevertheless, due to the fact that in contrary to the quasi self adjoint method, it is possible to construct the Lagrangian associated with the reduced system of equations, thus the approach of quasi self adjointness employed in this paper includes some partly different complexities.

Keywords: conservation laws, Maxwell equations, Lagrangian quasi self adjoint method, variational problems.

چکیده: در این مقاله با استفاده از روش شبه‌خودالحاقی، ابداع شده توسط ابراگیموف در سال ۲۰۱۱، به محاسبه برخی قوانین پایستاری معادلات ماکسول در خلاء می‌پردازیم. باید توجه داشت که چون تعداد معادلات و مجهولات دستگاه معادلات تحت بررسی برابر نیستند، امکان یافتن لاگرانژی متناظر و استفاده مستقیم از قضیه نوتر وجود ندارد. با این حال، با حذف دو معادله از معادلات ماکسول به دستگاه معادلات تقلیل‌یافته‌ای می‌رسیم که در اصطلاح شبه‌خودالحاقی است و می‌توان با روش جدید ابراگیموف و بدون نیاز به لاگرانژی متناظر، قوانین پایستاری آن و در نتیجه تعدادی از قوانین پایستاری معادلات ماکسول را به‌دست آورد. لازم به ذکر است که ابراگیموف خود در سال ۲۰۰۹ برخی از قوانین پایستاری معادلات ماکسول در خلاء را با استفاده از روش خودالحاقی محاسبه کرده است، اما با توجه به اینکه در روش شبه‌خودالحاقی برخلاف خودالحاقی امکان محاسبه لاگرانژی متناظر دستگاه تقلیل‌یافته و استفاده از قضیه نوتر وجود ندارد، بنابراین روش استفاده شده در این مقاله متضمن محاسبات و پیچیدگی‌های نسبتاً متفاوتی است.

کلمات کلیدی: قوانین پایستاری، معادلات ماکسول، روش شبه‌خودالحاقی لاگرانژی، حساب تغییرات.

Corresponding author: sabzevari@math.iut.ac.ir

*نویسنده مسئول

۱ مقدمه

الکترومغناطیس شاخه‌ای از علم فیزیک است که به مطالعه پدیده‌های ناشی از نیروهای بین بارها و جریان‌های الکتریکی می‌پردازد. در این نظریه، نیروها به‌وسیله میدان‌های الکترومغناطیسی توصیف می‌شوند که توابعی از مکان و زمان هستند. میدان‌های الکترومغناطیسی به دو شکل الکتریکی و مغناطیسی بروز می‌کنند و این دو جنبه‌های مختلف از یک پدیده واحد هستند، به‌گونه‌ای که هرگونه تغییر در میدان الکتریکی باعث ایجاد میدان مغناطیسی می‌شود و برعکس. شاید به‌جرات بتوان گفت که امروزه به‌خاطر نبوغ فیزیک‌دان برجسته اسکاتلندی، جیمز کلارک ماکسول (۱۸۷۹–۱۸۳۱) است که ما می‌دانیم نور نوعی انرژی الکترومغناطیس است که معمولاً تحت عنوان امواج الکترومغناطیس شناخته می‌شود. معادلات ماکسول به توصیف این ویژگی فیزیکی می‌پردازند که چگونه دو میدان الکتریکی و مغناطیسی همدیگر را تولید می‌کنند و یا با یکدیگر تعویض می‌شوند. موقعیت الکترومغناطیسی در فضای خلاء با دو میدان برداری عمود برهم الکتریکی $E\left(x,t\right)$ و مغناطیسی $H\left(x,t\right)$ تعیین می‌شوند که در آن x متغیر (سه مؤلفه‌ای) مکان و t متغیر زمان است. ماکسول نشان داد که موقعیت دو میدان برداری الکتریکی و مغناطیسی مزبور در چنین شرایطی توسط دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر موسوم به معادلات ماکسول تعیین می‌شوند (در اینجا فرض بر آن است که دو میدان برداری به شکل

$$E(x,y,z,t)=(E^{۱},E^{۲},E^{۳})$$

و

$$H(x,y,z,t)=\left(H^{۱},H^{۲},H^{۳}\right)$$

هستند):

$$\begin{cases} E_x^{۲}-E_y^{۱}+H_t^{۳}=۰, & H_x^{۲}-H_y^{۱}-E_t^{۳}=۰, \\ E_y^{۳}-E_z^{۲}+H_t^{۱}=۰, & H_y^{۳}-H_z^{۲}-E_t^{۱}=۰, \\ E_z^{۱}-E_x^{۳}+H_t^{۲}=۰, & H_z^{۱}-H_x^{۳}-E_t^{۲}=۰, \\ E_x^{۱}+E_y^{۲}+E_z^{۳}=۰, & H_x^{۱}+H_y^{۲}+H_z^{۳}=۰. \end{cases} \qquad (۱)$$

قوانین پایستاری:

یکی از کاربردهای مستقیم نظریه تقارن در فیزیک را می‌توان در مفهوم قوانین پایستاری جستجو کرد. مفهوم تقارن به واسطه قضیه ارزشمند و مشهور نوتر [۱] به قانون پایستاری گره می‌خورد، به‌گونه‌ای که به‌جرأت می‌توان گفت که این قضیه مهم‌ترین راه قابل اتکا برای محاسبه قوانین پایستاری یک کمیت فیزیکی (یک مسئله وردش یا یک دستگاه معادلات دیفرانسیل اویلر–لاگرانژ از منظر ریاضی آن) است.

تعریف ۱. ([۲]) دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه n–ام دلخواه $\Delta(x,u^{(n)})=۰$ با متغیرهای مستقل $x=\left(x^{۱},\ldots,x^{p}\right)$ و وابسته $u=\left(u^{۱},\ldots,u^{q}\right)$ را در نظر می‌گیریم. یک *قانون پایستاری* برای این دستگاه یک رابطه تساوی به‌صورت:

$$Div\,(P)=۰$$

است به‌طوری‌که هر جواب از دستگاه

$$\Delta(x,u^{(n)})=۰$$

در آن برقرار باشد. در اینجا

$$P = (P_۱, \ldots, P_p)$$

یک p-تایی مرتب از توابع هموار $P_i\left(x, u^{(n)}\right)$ است.

از دیدگاه ریاضی می‌توان نظریه قوانین پایستاری را تعمیمی از مفهوم انتگرال اولیه از نظریه معادلات دیفرانسیل منظم به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دانست.

تعریف ۲. فرض کنیم $x = \left(x^۱, \ldots, x^p\right)$ و $u = \left(u^۱, \ldots, u^q\right)$ به‌ترتیب متغیرهای مستقل و وابسته یک مسئله وردش مرتبه n مانند

$$\mathcal{L} = \int L\left(x, u^{(n)}\right) dx$$

با تابع لاگرانژی $L\left(x, u^{(n)}\right)$ باشد (تعاریف مربوطه را در فصل ۴ از [۲] ببینید). برای هر $1 \le i \le q$ *عملگر اویلر* i-ام مسئله وردش به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_i := \sum_J \left(-D\right)_J \frac{\partial}{\partial u_J^i}.$$

در اینجا J یک k-تایی مرتب برای $k \ge ۰$ دلخواه به شکل $J = \left(j_۱, \ldots, j_k\right)$ است به‌طوری‌که هر یک از مولفه‌های آن عددی بین ۱ تا p است. منظور از $\frac{\partial}{\partial u_J^i}$ عملگر مشتق‌گیری u^i نسبت به $x^{j_۱}, \ldots, x^{j_k}$ است و همچنین D_J را به‌صورت ترکیب

$$D_J := D_{j_۱} \ldots D_{j_k}$$

تعریف می‌کنیم که در آن هر D_j عملگر مشتق‌گیری به شکل:

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{r=۱}^{q} \sum_I u_{I,j}^r \frac{\partial}{\partial u_I^r}$$

است. متناظر با مسئله وردش مزبور در این تعریف، دستگاه معادلات دیفرانسیل با q معادله $E_i\left(L\right) \equiv ۰$ و q مجهول $u_۱, \ldots, u_q$ را دستگاه *معادلات اویلر-لاگرانژ* می‌نامیم.

می‌توان ثابت کرد که هر جواب و هر تقارن از یک مسئله وردش یک جواب و یک تقارن از دستگاه معادلات اویلر-لاگرانژ نظیر آن نیز هست.

شاید بتوان قضیه امی نوتر (۱۹۸۲-۱۹۳۵)، ریاضی‌دان شهیر آلمانی، را یکی از تأثیرگذارترین نتایج در نظریه حساب تغییرات دانست که بر اساس آن، با داشتن تقارن‌های یک مسئله وردش می‌توان قوانین پایستاری مربوط به دستگاه معادلات دیفرانسیل اویلر-لاگرانژ نظیر آن را محاسبه کرد.

قضیه ۳. (قضیه نوتر ۱۹۱۸). فرض کنیم میدان برداری:

$$X = \sum_{i=۱}^{p} \xi^i (x, u) \partial_{x^i} + \sum_{j=۱}^{q} \eta_j (x, u) \partial_{u^j}$$

یک تقارن از مسئله وردش

$$\mathcal{L} = \int L\left(x, u^{(n)}\right) dx$$

باشد. برای $j = ۱, \ldots, q$ قرار می‌دهیم:

$$Q_j(u, v) = \eta_j - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^j.$$

در این صورت، q-تایی مرتب $Q = (Q_۱, \ldots, Q_q)$ مشخصه‌ای از یک قانون پایستاری برای معادله اویلر-لاگرانژ مسئله وردش مزبور است. به‌عبارت

دقیق‌تر، p-تایی مرتب $P=(P_1,\ldots,P_p)$ از توابع بر حسب x و مشتقات u وجود دارد به‌طوری‌که معادله:

$$Div\ P = Q.E(L) = \sum_{j=1}^{q} Q_j E_j(L)$$

یک قانون پایستاری برای معادله اویلر-لاگرانژ $E(L)=0$ است. به‌خصوص اگر

$$\int L\left(x, u^{(1)}\right) dx$$

یک مسئله وردش مرتبه اول باشد آنگاه توابع:

$$P_i = \xi^i L - \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} \xi^k u_k^j \frac{\partial L}{\partial u_k^j}, \quad i=1,\ldots,p$$

یک قانون پایستاری برای معادله اویلر-لاگرانژ متناظر تشکیل خواهند داد.

۲ مقدمه روش ابراگیموف

اگرچه همان‌گونه که گفته شد قضیه نوتر به‌واقع از جمله مهم‌ترین نتایج موجود در نظریه حساب تغییرات برای محاسبه قوانین پایستاری است، اما بااین‌حال این قضیه خالی از نقاط ضعف نیز نیست. در واقع مهم‌ترین اشکال موجود در قضیه نوتر آن است که تنها برای محاسبه قوانین پایستاری معادلاتی قابل استفاده است که خود، معادلات اویلر-لاگرانژ نظیر یک مسئله وردش با لاگرانژی مشخص هستند. به‌همین خاطر، این قضیه خصوصاً در مورد دستگاه‌هایی که تعداد معادلات آنها برابر مجهولاتشان نیست (مثل معادلات ماکسول) تقریباً خالی از فایده است، زیرا برای این‌گونه معادلات اساساً تعریف لاگرانژی و مسئله وردش نظیر ممکن نیست. بااین‌حال نیل ابراگیموف، ریاضی‌دان روس‌تبار سوئدی، در سال‌های ۲۰۰۷ و ۲۰۱۱ روش‌هایی به‌ترتیب تحت عناوین خودالحاقی [۳] و شبه‌خودالحاقی [۴] ابداع کرد که بر اساس آنها، امکان محاسبه قوانین پایستاری یک دستگاه معادلات دیفرانسیل حتی غیراویلر-لاگرانژ نیز وجود دارد. در این بخش به معرفی مقدمات مربوط به این روش‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۴. دستگاه الحاقی متناظر با یک دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه n مانند

$$F_\alpha\left(x, u, u', \ldots, u^{(n)}\right) \equiv 0, \ \alpha = 1,\ldots,m$$

با متغیرهای وابسته $u = u^1,\ldots,u^m$ (دقت کنید که تعداد معادلات و متغیرهای وابسته برابر است)، دستگاهی است با مشتقات جزئی مجدداً از مرتبه n، دارای $2m$ متغیر وابسته $u,v = u^1,\ldots,u^m, v^1,\ldots,v^m$ و تعریف شده به‌صورت زیر:

$$F_\alpha^*\left(x, u, v, \ldots, u^{(n)}, v^{(n)}\right) = \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial\left(v^\beta F_\beta\right)}{\partial u^\alpha} \equiv 0,$$
$$\alpha = 1,\ldots,m.$$

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را *خودالحاقی* می‌نامیم هرگاه با قرار دادن $v^\alpha = u^\alpha$ در معادله الحاقی نظیر آن، دستگاه:

$$F_\alpha^*(x, u, u, u', u', \ldots, u^{(n)}, u^{(n)}) = 0,$$
$$\alpha = 1,\ldots,m$$

با دستگاه معادلات اصلی معادل باشد. همچنین این دستگاه را *شبه‌خودالحاقی* می‌نامیم هرگاه تغییر مختصاتی مانند $v^\alpha = \varphi^\alpha(u)$ برای $\alpha = 1,\ldots,m$ آن را به دستگاهی معادل با دستگاه اولیه تبدیل کند. بدیهی است که هر دستگاه خودالحاقی، شبه‌خودالحاقی نیز هست.

مهم‌ترین نتایج ابراگیموف را می‌توان در قضیه زیر خلاصه کرد.

قضیه ۵. ([۳،۴]) دستگاه معادلات دیفرانسیل $2m$ معادله و $2m$ مجهولی مرتبه n زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\Delta\left(x,u,v,\ldots,u^{(n)},v^{(n)}\right)=\begin{cases} F_\alpha\left(x,u,\ldots,u^{(n)}\right)\equiv 0, \\ F_\alpha^*\left(x,u,v,\ldots,u^{(n)},v^{(n)}\right)\equiv 0 \end{cases}$$
$$\alpha=1,\ldots,m$$

که در آن $F_\alpha^*\equiv 0$ معادله الحاقی متناظر با $F_\alpha\equiv 0$ است. همچنین فرض کنیم که میدان برداری

$$X=\sum_{i=1}^{p}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{m}\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

یک تقارن از دستگاه $F_\alpha=0,\alpha=1,\ldots,m$ باشد. در این‌صورت تابع:

$$L\left(x,u,v,\ldots,u^{(n)},v^{(n)}\right)=\sum_{\beta=1}^{m}v^\beta F_\beta\left(x,u,\ldots,u^{(n)}\right)$$

لاگرانژی است که Δ دستگاه معادلات اویلر–لاگرانژ متناظر با مسئله وردش آن است. همچنین داریم:

الف) اگر دستگاه $F_\alpha\equiv 0$ خودالحاقی باشد، آنگاه با قراردادن $v=u$ در L، یک لاگرانژی برای این دستگاه خواهیم داشت. به‌علاوه، اگر برای هر $i=1,\ldots,p$ تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} C^i &= \xi^i(L) \\ &+W^\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}-D_j\left(\frac{\partial}{\partial u_{ij}^\alpha}\right)+D_jD_k\left(\frac{\partial}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right)\right) \\ &+D_j\left(W^\alpha\right)\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\alpha}-D_k\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right)+\cdots\right) \\ &+D_jD_k\left(W^\alpha\right)\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}-\cdots\right), \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن $W^\alpha:=\eta^\alpha-\sum_{j=1}^{p}\xi^j u_j^\alpha$ است، آنگاه بردار تابعی $C=\left(C^1,\ldots,C^p\right)$ یک قانون پایستاری برای دستگاه معادلات Δ خواهد بود، به‌طوری‌که اگر هر v^α را با u^α در ضابطه آن تعویض کنیم یک قانون پایستاری برای دستگاه اولیه $F_\alpha\equiv 0$ به‌دست می‌آید.

ب) اگر دستگاه $F_\alpha\equiv 0$ شبه‌خودالحاقی به‌واسطه تغییر مختصات $v^\alpha=\varphi^\alpha(u)$ باشد، آنگاه بردار تابعی $C=\left(C^1,\ldots,C^p\right)$ یک قانون پایستاری برای دستگاه معادلات Δ نیز هست به‌طوری‌که اگر هر v^α را با $\varphi^\alpha(u)$ در آن تعویض کنیم یک قانون پایستاری برای دستگاه $F_\alpha\equiv 0$ خواهیم داشت.

در نگاه اول چنین به‌نظر می‌رسد که قضیه بالا نیز دارای این نقطه ضعف است که دستگاه اولیه $F_\alpha\equiv 0$ می‌بایست دارای تعداد معادلات و متغیرهای وابسته برابر باشد. بااین‌حال، همان‌گونه که در بخش بعد خواهیم

دید، در بسیاری مواقع و از جمله در رابطه با معادلات ماکسول، این نقیصه ظاهری قابل حل است.

۳ محاسبه قوانین پایستاری معادلات ماکسول با روش شبه‌خودالحاقی

اکنون دستگاه معادلات ماکسول (۱) را در نظر می‌گیریم. این دستگاه دارای ۸ معادله و شش مجهول است و به دلیل همین عدم تساوی، امکان ساخت لاگرانژی متناظر و در نتیجه محاسبه قوانین پایستاری آن با استفاده از قضیه نوتر وجود ندارد. بااین‌حال ابراگیموف در مقاله [۵] و با استفاده از روش خودالحاقی به محاسبه برخی قوانین پایستاری این دستگاه از معادلات دیفرانسیل پرداخته است. او ابتدا با حذف دو معادله آخر از دستگاه (۱) آن را به یک دستگاه (تقلیل‌یافته) خودالحاقی با تعداد معادلات و مجهولات برابر شش تبدیل کرد و سپس با استفاده از قسمت الف قضیه ۵ لاگرانژی و تعدادی از قوانین پایستاری دستگاه تقلیل‌یافته را، که قوانین پایستاری خود معادلات ماکسول نیز هستند، محاسبه نمود.

اما روشی که ما در این مقاله دنبال خواهیم کرد روش شبه‌خودالحاقی است. ما در ابتدا، برخلاف ابراگیموف، دو معادله ردیف دوم از دستگاه معادلات ماکسول (۱) را حذف می‌کنیم. به‌این‌ترتیب، دستگاه شش معادله و مجهول

$$H^1, H^2, H^3, E^1, E^2, E^3$$

به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} F_1 = E^1_z - E^3_x + H^2_t = 0 \\ F_2 = E^2_x - E^1_y + H^3_t = 0 \\ F_3 = E^1_x + E^2_y + E^3_z = 0 \\ F_4 = H^1_z - H^3_x - E^2_t = 0 \\ F_5 = H^2_x - H^1_y - E^3_t = 0 \\ F_6 = H^1_x + H^2_y + H^3_z = 0 \end{cases} \qquad (۳)$$

با انجام محاسبات لازم و با فرض

$$v = \left(v^1, v^2, v^3, u^1, u^2, u^3 \right)$$

به‌عنوان متغیرهای جدید اضافه شده (قضیه ۵ راببینید)، معادلات الحاقی متناظر با شش معادله بالا عبارتند از:

$$\begin{cases} F^*_1 = -u^3_x + u^2_y - u^1_z = 0 \\ F^*_2 = -u^2_x - u^3_y + v^1_t = 0 \\ F^*_3 = u^1_x - u^3_z + v^2_t = 0 \\ F^*_4 = -v^3_x + v^2_y - v^1_z = 0 \\ F^*_5 = -v^2_x - v^3_y - u^1_t = 0 \\ F^*_6 = v^1_x - v^3_z - u^2_t = 0 \end{cases} \qquad (۴)$$

حال اگر

$$\Delta := \Delta\left(x, y, z, t, E, H, u, v \right)$$

را دستگاه حاصل از ۱۲ معادله (۳) و (۴) بدانیم، آنگاه طبق قضیه ۵، لاگرانژی زیر را برای این دستگاه دوازده مجهولی خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
L :=\; & u^{۱}\left(E^{۱}_{z}-E^{۳}_{x}+H^{۲}_{t}\right)+u^{۲}\left(E^{۲}_{x}-E^{۱}_{y}+H^{۳}_{t}\right)\\
& +u^{۳}\left(E^{۱}_{x}+E^{۲}_{y}+E^{۳}_{z}\right)+v^{۱}\left(H^{۱}_{z}-H^{۳}_{x}-E^{۲}_{t}\right)\\
& +v^{۲}\left(H^{۲}_{x}-H^{۱}_{y}-E^{۳}_{t}\right)+v^{۳}\left(H^{۱}_{x}+H^{۲}_{y}+H^{۳}_{z}\right)
\end{aligned}
\qquad (۵)
$$

از سوی دیگر، همچنین می‌توان دید که دستگاه (۳) شبه‌خودالحاقی است. در واقع، مقایسه این دستگاه با (۴) نشان می‌دهد که با اعمال تغییر مختصات به‌صورت:

$$
\begin{cases}
u^{۱}=-E^{۳},\\
u^{۲}=E^{۲},\\
u^{۳}=-E^{۱},
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
v^{۱}=-H^{۳},\\
v^{۲}=H^{۲},\\
v^{۳}=-H^{۱},
\end{cases}
\qquad (۶)
$$

خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
& F^{*}_{۱}=F_{۳},\quad F^{*}_{۲}=-F_{۲},\quad F^{*}_{۳}=F_{۱},\\
& F^{*}_{۴}=F_{۶},\quad F^{*}_{۵}=-F_{۵},\quad F^{*}_{۶}=F_{۴}.
\end{aligned}
$$

ذکر این نکته ضروری است که براساس قضیه ۵، با توجه به اینکه دستگاه (۳) شبه‌خودالحاقی و نه خودالحاقی است، بنابراین برخلاف روش ابراگیموف [۵] لاگرانژی متناظر با این دستگاه را در اختیار نخواهیم داشت و به‌همین دلیل روش ادامه کار در این مقاله نسبتاً متفاوت خواهد بود.

یافتن تقارن‌های دستگاه تقلیل‌یافته (۳):

بر اساس محک پایستاری[۱] (قضیه ۲.۷۱ از [۲])، میدان برداری

$$
X=\sum_{i=۱}^{p}\xi^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}+\sum_{\alpha=۱}^{q}\eta^{\alpha}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}
$$

یک تقارن از دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta\left(x,u^{(n)}\right)$ است، هرگاه (Δ) $X^{(n)}$ روی جواب‌های این دستگاه صفر شود. در اینجا، $X^{(n)}$ توسیع مرتبه n–ام میدان برداری X است.

تعداد تقارن‌های دستگاه معادلات ماکسول (۱) برابر هفده و ضابطه آنها در صفحات ۱۵۸ و ۱۵۹ از [۵] آمده است. برای یافتن زیرجبر لی بیشینه این جبر لی تقارنی که شامل تقارن‌های دستگاه (۳) باشد، کافیست آنها را از میان تقارن‌های مزبور و با استفاده از محک پایستاری بیابیم. براین اساس و با انجام محاسبات لازم می‌توان هشت تقارن زیر را برای دستگاه (۳) یافت:

$$
\begin{cases}
Z_{۰}=E.\dfrac{\partial}{\partial H}-H.\dfrac{\partial}{\partial E},\\
Z_{۱}=E.\dfrac{\partial}{\partial E}+H.\dfrac{\partial}{\partial H},\\
Z_{۲}=t\dfrac{\partial}{\partial t}+x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}+z\dfrac{\partial}{\partial z},\\
S=E_{*}(x,t).\dfrac{\partial}{\partial E}+H_{*}(x,t).\dfrac{\partial}{\partial H},
\end{cases}
\quad
\begin{cases}
\chi_{۰}=\dfrac{\partial}{\partial t},\\
\chi_{۱}=\dfrac{\partial}{\partial x},\\
\chi_{۲}=\dfrac{\partial}{\partial y},\\
\chi_{۳}=\dfrac{\partial}{\partial z}.
\end{cases}
\qquad (۷)
$$

در اینجا E_{*} و H_{*} می‌توانند هر جواب دستگاه معادلات ماکسول (۱) باشند.

محاسبه قوانین پایستگی:

پس از یافتن تقارن‌های (۷) از دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳)، اکنون این امکان را داریم که با توجه به شبه‌خودالحاقی بودن این دستگاه و براساس قسمت ب از قضیه ۵، به محاسبه قانون پایستاری متناظر با هر یک از این تقارن‌های هشت‌گانه بپردازیم. با توجه به اینکه محاسبات مربوطه اندکی طولانی است و نیاز به فضای زیادی دارد در اینجا محاسبات و نحوه بررسی آنها را در

[1] Invariance criteria

مورد میدان تقارنی انتقال زمان χ_0 با ارائه جزئیات توضیح می‌دهیم و نتایج مربوط به سایر میدان‌ها را به‌طور خلاصه در جدول انتهای مقاله نمایش خواهیم داد.

انتقال زمان $\chi_0 = \partial / \partial t$:

با توجه به نمادهای موجود در قضیه ۵ داریم:

$$\xi^0 = 1,\ \xi^i = \eta^\alpha = 0,\ i,\alpha = 1,2,3.$$

حال با جایگزین کردن ξ^i و η^α در ضابطه مربوط به W^α خواهیم داشت:

$$W^\alpha = \eta^\alpha - \sum_j \xi^j u_j^\alpha = -u_t^\alpha, \quad \alpha = 1,2,3.$$

در ادامه با جای‌گذاری روابط (۶) در رابطه لاگرانژی (۵) به‌دست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned} L :=& -E^3\left(E_z^1 - E_x^3 + H_t^2\right) + E^2\left(E_x^2 - E_y^1 + H_t^3\right)\\ &-E^1\left(E_x^1 + E_y^2 + E_z^3\right) - H^3\left(H_z^1 - H_x^3 - E_t^2\right)\\ &+H^2\left(H_x^2 - H_y^1 - E_t^3\right) - H^1\left(H_x^1 + H_y^2 + H_z^3\right), \end{aligned}$$

اکنون با قرار دادن W^α و لاگرانژی بالا در روابط (۲)، قوانین پایستاری زیر متناظر با تقارن انتقال زمان را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} C^0 &= \xi^0 L - u_t^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_t^\alpha}\\ &= L - \left(-E_t^3 \frac{\partial L}{-\partial E_t^3}\right) - \left(E_t^2 \frac{\partial L}{\partial E_t^2}\right) - \left(-E_t^1 \frac{\partial L}{-\partial E_t^1}\right) - \left(-H_t^3 \frac{\partial L}{-\partial H_t^3}\right) - \left(H_t^2 \frac{\partial L}{\partial H_t^2}\right) - \left(-H_t^1 \frac{\partial L}{-\partial H_t^1}\right)\\ &= L - E_t^2 H^3 + E_t^3 H^2 + H_t^2 E^3 - H_t^3 E^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^1 &= -u_t^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_x^\alpha}\\ &= -\left(-E_t^3 \frac{\partial L}{-\partial E_x^3}\right) - \left(E_t^2 \frac{\partial L}{\partial E_x^2}\right) - \left(-E_t^1 \frac{\partial L}{-\partial E_x^1}\right) - \left(-H_t^3 \frac{\partial L}{-\partial H_x^3}\right) - \left(H_t^2 \frac{\partial L}{\partial H_x^2}\right) - \left(-H_t^1 \frac{\partial L}{-\partial H_x^1}\right)\\ &= E_t^1 E^1 - E_t^2 E^2 - E_t^3 E^3 + H_t^1 H^1 - H_t^2 H^2 - H_t^3 H^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^2 &= -u_t^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_y^\alpha}\\ &= -\left(-E_t^3 \frac{\partial L}{-\partial E_y^3}\right) - \left(E_t^2 \frac{\partial L}{\partial E_y^2}\right) - \left(-E_t^1 \frac{\partial L}{-\partial E_y^1}\right) - \left(-H_t^3 \frac{\partial L}{-\partial H_y^3}\right) - \left(H_t^2 \frac{\partial L}{\partial H_y^2}\right) - \left(-H_t^1 \frac{\partial L}{-\partial H_y^1}\right)\\ &= -E_t^1 E^2 + E_t^2 E^1 + H_t^1 H^2 + H_t^2 H^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^3 &= -u_t^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_z^\alpha}\\ &= -\left(-E_t^3 \frac{\partial L}{-\partial E_z^3}\right) - \left(E_t^2 \frac{\partial L}{\partial E_z^2}\right) - \left(-E_t^1 \frac{\partial L}{-\partial E_z^1}\right) - \left(-H_t^3 \frac{\partial L}{-\partial H_z^3}\right) - \left(H_t^2 \frac{\partial L}{\partial H_z^2}\right) - \left(-H_t^1 \frac{\partial L}{-\partial H_z^1}\right)\\ &= E_t^1 E^3 + E_t^3 E^1 + H_t^1 H^3 + H_t^3 H^1. \end{aligned}$$

در جدول زیر نتایج مربوط به قوانین پایستاری متناظر با تقارن‌های هشت‌گانه ماکسول را داریم:

جدول ۱. نتایج مربوط به قوانین پایستاری

میدان تقارنی	C^0	C^1	C^2	C^3
X_0	$L-E_t^2H^3+E_t^3H^2$ $+H_t^2E^3-H_t^3E^2$	$E_t^1E^1-E_t^2E^2-E_t^3E^3$ $+H_t^1H^1-H_t^2H^2-H_t^3H^3$	$E_t^1E^2+E_t^2E^1$ $+H_t^1H^2+H_t^2H^1$	$E_t^1E^3+E_t^3E^1$ $+H_t^1H^3+H_t^3H^1$
X_1	$-E_x^2H^3+E_x^3H^2$ $+H_x^2E^3-H_x^3E^2$	$L+E_x^1E^1-E_x^2E^2-E_x^3E^3$ $+H_x^1H^1-H_x^2H^2-H_x^3H^3$	$E_x^1E^2+E_x^2E^1$ $+H_x^1H^2+H_x^2H^1$	$E_x^1E^3+E_x^3E^1$ $+H_x^1H^3+H_x^3H^1$
X_2	$-E_y^2H^3+E_y^3H^2$ $+H_y^2E^3$	$E_y^1E^1-E_y^2E^2-E_y^3E^3$ $+H_y^1H^1-H_y^2H^2-H_y^3H^3$	$L+E_y^1E^2+E_y^2E^1$ $+H_y^1H^2+H_y^2H^1$	$E_y^1E^3+E_y^3E^1$ $+H_y^1H^3+H_y^3H^1$
X_3	$-E_z^2H^3+E_z^3H^2$ $+H_z^2E^3-H_z^3E^2$	$E_z^1E^1-E_z^2E^2-E_z^3E^3$ $+H_z^1H^1-H_z^2H^2-H_z^3H^3$	$E_z^1E^2+E_z^2E^1$ $+H_z^1H^2+H_z^2H^1$	$L+E_z^1E^3+E_z^3E^1$ $+H_z^1H^3+H_z^3H^1$
Z_0	0	0	0	0
Z_1	$-E_z^2H^3+E_z^3H^2$ $+H_z^2E^3-H_z^3E^2$	$E_z^1E^1-E_z^2E^2-E_z^3E^3$ $+H_z^1H^1-H_z^2H^2-H_z^3H^3$	$E_z^1E^2+E_z^2E^1$ $+H_z^1H^2+H_z^2H^1$	$L+E_z^1E^3+E_z^3E^1$ $+H_z^1H^3+H_z^3H^1$
Z_2	$t.L$ $-H^3\left(tE_t^2+xE_x^2+yE_y^2+zE_z^2\right)$ $+H^2\left(tE_t^3+xE_x^3+yE_y^3+zE_z^3\right)$ $+E^3\left(tH_t^2+xH_x^2+yH_y^2+zH_z^2\right)$ $-E^2\left(tH_t^3+xH_x^3+yH_y^3+zH_z^3\right)$	$x.L+E^1\left(tE_t^1+xE_x^1+yE_y^1+zE_z^1\right)$ $-E^2\left(tE_t^2+xE_x^2+yE_y^2+zE_z^2\right)$ $-E^3\left(tE_t^3+xE_x^3+yE_y^3+zE_z^3\right)$ $+H^1\left(tH_t^1+xH_x^1+yH_y^1+zH_z^1\right)$ $-H^2\left(tH_t^2+xH_x^2+yH_y^2+zH_z^2\right)$ $-H^3\left(tH_t^3+xH_x^3+yH_y^3+zH_z^3\right)$	$y.L$ $+E^2\left(tE_t^1+xE_x^1+yE_y^1+zE_z^1\right)$ $+E^1\left(tE_t^2+xE_x^2+yE_y^2+zE_z^2\right)$ $+H^2\left(tH_t^1+xH_x^1+yH_y^1+zH_z^1\right)$ $+H^1\left(tH_t^2+xH_x^2+yH_y^2+zH_z^2\right)$	$z.L$ $+E^3\left(tE_t^1+xE_x^1+yE_y^1+zE_z^1\right)$ $+H^3\left(tH_t^1+xH_x^1+yH_y^1+zH_z^1\right)$ $+H^1\left(tH_t^3+xH_x^3+yH_y^3+zH_z^3\right)$
S	$-E_z^2H^3+E_z^3H^2$ $+H_z^2E^3-H_z^3E^2$	$E_z^1E^1-E_z^2E^2-E_z^3E^3$ $+H_z^1H^1-H_z^2H^2-H_z^3H^3$	$E_z^1E^2+E_z^2E^1$ $+H_z^1H^2+H_z^2H^1$	$L+E_z^1E^3+E_z^3E^1$ $+H_z^1H^3+H_z^3H^1$

References

[1] D.E. Neuenschwander, Emmy Neother's Wonderful theorem, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2011.

[2] P.J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag,

1986.

[3] N. H. Ibragimov, A new conservation theorem, J. Math. Anal. Appl., 333 (2007) 311-328.

[4] N. H. Ibragimov, Nonlinear self-adjointness and conservation laws, J. Phys. A: Math. Theor., 44 (2011) 432002.

[5] N.H. Ibragimov, Symmetries, Lagrangian and conservation laws for the Maxwell equations, Acta. Appl. Math., 105 (2009) 157-187.