Complex and Nonlinear Systems
Vol. 1, No. 1, Autumn 2017, pp. 23-38

سیستم‌های مختلط و غیرخطی
سال ۱، دوره ۱، شماره ۱، پاییز ۱۳۹۶، صص ۲۳ تا ۳۸

درباره نگاشت‌های انقباضی $\alpha-\omega-$مییر–کییلر

محدثه پاک‌نظر*

پژوهشگر، دانشکده ریاضی، دانشگاه فرهنگیان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۳/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۵/۲۰

On $\alpha-\omega-$Meir-Keeler contractive mappings

Mohadeseh Paknazar*

Researcher, Department of Mathematics, Farhangian University

Received: 5/24/2017 Accepted: 8/11/2017

Abstract: In this paper, in the setting of modular metric spaces, we introduce the class of $\alpha-\omega-$Meir-Keeler contractive and we establish some results of fixed point. As consequences of these results, we deduce fixed point theorems in modular metric spaces endowed with a graph and in partially ordered metric spaces. Some examples are furnished to demonstrate the validity of the obtained results.

Keywords: Modular metric space, $\alpha-\omega-$Meir-Keeler contractive mappings, Fixed point.

چکیده: در این مقاله ما کلاس نگاشت‌های انقباضی $\alpha-\omega-$میپر–کییلر را معرفی می‌کنیم و بعضی نتایج نقطه ثابت را برای این نگاشت‌ها پایه گذاری می‌کنیم. به عنوان نتیجه، قضایای نقطه ثابت را در فضاهای مدولار متری که به ترتیب جزیی و گراف مجهز هستند به دست می‌آوریم. چند مثال برای نشان دادن کاربردی بودن نتایج آورده شده است.

کلمات کلیدی: فضای متری مدولار، نگاشت‌های انقباضی $\alpha-\omega-$میپر–کییلر، نقطه ثابت.

۱ مقدمه

فضاهای متری مدولار تعمیم طبیعی از مدولارهای قدیمی روی فضاهای خطی مانند، لبگ، اورلیکس، میزلاک–اورلیکس، لورنتز، اورلیکس–لورنتز، کلدرانلوانفسکی و بسیاری دیگر هستند. فضای مدولار متری در [۱-۲] تعریف شده است. مقدمه این مفهوم جدید به وسلیه برداشت فیزیکی از مدولار توجیه شده است. به‌این‌صورت که متر روی یک مجموعه نشان‌دهنده فاصله غیر منفی بین دو نقطه مجموعه است، یک مدولار نیز روی یک مجموعه نشان‌دهنده میدان سرعت‌ها برای هر لحظه $\lambda>0$ است. در حقیقت سرعت متوسط،

$$\omega_\lambda(x,y)$$

بیان می‌کند که برای حرکت بین دو نقطه x و y زمان λ صرف شده است. اما در این مقاله نسخه‌های قدیمی و غیرخطی مدولار که توسط ناکانو [۳] در فضاهای برداری و فضاهای تابعی مدولار که توسط میزلاک [۴]

*نویسنده مسئول

Corresponding author: m.paknazar@cfu.ac.ir

و اورلیکس [۵] تعریف شده‌اند را در نظر می‌گیریم. در سال‌های اخیر محققان زیادی در زمینه رفتارهای الکترورئولوژی[1] سیال‌ها مطالعه کرده‌اند که بعضی مواقع از آن به عنوان سیال‌های هوشمند نام برده شده است (به عنوان مثال لیتیم پلی متاکریلات). یک مدل جالب برای این سیال‌ها با استفاده از فضاهای لبگ، لبولو، L^p و $W^{1,p}$ به دست آمده است که در آن p یک تابع می‌باشد [۶]. در این راستا نگرش رایج در رابطه با مسئله دیرکله [۷–۸]، تبدیل تابعی انرژی (که ذاتاً به وسیله مدولار تعریف شده است) یک مسئله پیچیده است که شامل نرم لوکسانبرگ می‌باشد. در بسیاری از موارد، به‌ویژه در کاربردهای عملگرهای انتگرالی و نتایج نقاط ثابت و تقریبی، شرایط مدولار بسیار طبیعی است، چون فرض‌هایی از نوع مدولار می‌توانند بسیار آسان‌تر از نقطه مقابل‌شان، یعنی متر و نرم تمایز داده شوند. مطالعه وجود نقطه ثابت در فضاهای تابعی مدولار اولین بار در مقاله [۹] انجام شد و بعد از آن پژوهشگران علاقه شدیدی برای مطالعه در این راستا پیدا کردند. خوانندگان می‌توانند برای اطلاع بیشتر در نظریه نقطه ثابت به کتاب [۱۰] و برای اطلاع بیشتر در فضاهای تابعی مدولار به کتاب [۱۱] مراجعه کنند. در جهت تعمیم اصل انقباضی باناخ تلاش‌های زیادی انجام شده است که نتیجه آن تعاریف گوناگون نامساوی انقباضی می‌باشد. در سال ۱۹۶۹، مییر و کیلر [۱۲] قضیه جالب زیر را به دست آوردند.

قضیه ۱. فرض کنید (X,d) یک فضای متری کامل و $T:X\to X$ یک نگاشت باشد به‌طوری‌که برای هر $x,y\in X$ و هر $\varepsilon>0$، یک $\delta(\varepsilon)>0$ وجود داشته باشد که

$$\varepsilon\le d(x,y)<\varepsilon+\delta\Rightarrow d(Tx,Ty)<\varepsilon,$$

در این صورت T یک نقطه ثابت منحصربه‌فرد دارد.

قضیه مییرکییلر از جنبه‌های زیادی توسیع داده شده‌است ([۱۳–۱۵] و مراجع درون آن را ببینید).

در این مقاله ما کلاس نگاشت‌های انقباضی $\alpha-\omega-$مییر–کییلر را معرفی می‌کنیم و بعضی نتایج نقطه ثابت را برای این نگاشت‌ها پایه‌گذاری می‌کنیم. به عنوان نتیجه، ما قضایای نقطه ثابت را در فضاهای مدولاری که به ترتیب جزیی و گراف مجهز هستند به دست می‌آوریم. چند مثال برای نشان دادن کاربردی بودن نتایج آورده شده است.

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و

$$\omega:(0,\infty)\times X\times X\to[0,\infty]$$

یک تابع باشد. برای راحتی کار به‌ازای هر $x,y\in X$ و $\lambda>0$ خواهیم نوشت

$$\omega_\lambda(x,y)=\omega(\lambda,x,y).$$

تعریف ۱. ([۱–۲]) تابع

$$\omega:(0,\infty)\times X\times X\to[0,\infty]$$

یک متر مدولار روی X نامیده می‌شود هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

(i) $x=y$ اگر و فقط اگر برای هر $\lambda>0$، $\omega_\lambda(x,y)=0$،

(ii) به‌ازای هر $x,y\in X$ و $\lambda>0$ داریم، $\omega_\lambda(x,y)=\omega_\lambda(y,x)$،

(iii) به‌ازای هر $x,y,z\in X$ و $\lambda,\mu>0$ داریم

[1] Electro Rheology

$.\omega_{\lambda+\mu}(x,y)\le\omega_{\lambda}(x,z)+\omega_{\mu}(z,y)$

اگر در تعریف ۱ شرط

(I') بەازای هر $x\in X$ و $\lambda>\circ$ داریم،

$$\omega_{\lambda}(x,x)=\circ$$

را به‌جای شرط (i) قرار دهیم، آنگاه گوییم ω یک متر شبه‌مدولار روی X است. گوییم مدولار متریک ω روی X منظم است هرگاه شرط ضعیف زیر به جای (i) برقرار باشد:

(i) $x=y$ اگر و فقط اگر برای بعضی $\lambda>\circ$، $.\omega_{\lambda}(x,y)=\circ$

همچنین گوییم ω محدب است هرگاه به‌ازای هر $x,y,z\in X$ و $\lambda,\mu>\circ$ داشته باشیم

$$\omega_{\lambda+\mu}(x,y)\le\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\omega_{\lambda}(x,z)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\omega_{\mu}(z,y).$$

تبصره ۱. اگر ω یک متر شبه‌مدولار روی X باشد، آنگاه تابع $\lambda\to\omega_{\lambda}(x,y)$ نزولی است. در حقیقت اگر $\circ<\mu<\lambda$، آنگاه

$$\begin{aligned}\omega_{\lambda}(x,y)&\le\omega_{\lambda-\mu}(x,x)+\omega_{\mu}(x,y)\\&=\omega_{\mu}(x,y).\end{aligned}$$

تعریف ۲. [۱-۲] فرض کنید ω یک متر شبه‌مدولار روی X و $x_{\circ}\in X$ ثابت باشد. مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}X_{\omega}&=X_{\omega}(x_{\circ})\\&=\left\{x\in X:\lim_{\lambda\to\infty}\omega_{\lambda}(x,x_{\circ})=\circ\right\}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}X_{\omega}^{*}&=X^{*}_{\omega}(x_{\circ})\\&=\left\{x\in X:\exists\lambda=\lambda(x)(\omega_{\lambda}(x,x_{\circ})<\infty)\right\}.\end{aligned}$$

X_{ω} و X_{ω}^{*} فضاهای مدولار نامیده می‌شوند (حول $x_{\circ}$).

به وضوح در حالت کلی داریم، $.X_{\omega}\subset X_{\omega}^{*}$ فرض کنید ω یک مدولار روی X باشد. در [۲،۱] ثابت شده است که یک فضای متری مدولار می‌تواند به یک متر غیربدیهی مجهز شود. این متر به‌ازای هر $x,y\in X_{\omega}$ به‌صورت زیر تعریف شده‌است:

$.d_{\omega}(x,y)=\inf\{\lambda>0:\omega_{\lambda}(x,y)\le\lambda\}.$

همچنین اگر ωمحدب باشد آنگاه $X_{\omega}=X_{\omega}^{*}$ که این مجموعه مشترک را می‌توان به‌ازای هر $x,y\in X_{\omega}$ به متر زیر مجهز کرد:

$$d_{\omega}^{*}(x,y)=\inf\{\lambda>\circ:\omega_{\lambda}(x,y)\le ۱\}$$

این فاصله را فاصله لوکسانبرگ می‌نامیم. مثال ۲.۱ ارائه شده توسط خمسی و عبدو در [۱۶] مهم‌ترین انگیزه برای توسعه نظریه فضاهای متری مدولار می‌باشد. برای مثال‌های بیشتر می‌توانید به [۲،۱] مراجعه کنید.

تعریف ۳. فرض کنید X_{ω} یک فضای متری مدولار، M یک زیرمجموعه X_{ω} و $(x_n)_{n\ge\circ}$ یک دنباله در X_{ω} باشد. بنابراین

(۱) گوییم $(x_n)_{n\ge\circ}$ به نقطه $x\in X_{\omega}$، $-\omega$ همگرا است هرگاه به‌ازای هر $\lambda>\circ$ داشته باشیم $.\lim_{n\to\infty}\omega_{۱}(x_n,x)=۱$ نقطه x را نقطه $-\omega$حدی دنباله $(x_n)_{n\ge\circ}$ می‌نامیم،

(۲) دنباله $(x_n)_{n\ge\circ}$ را $-\omega$کوشی می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $\lambda>\circ$ داشته باشیم

$$\lim_{n,m\to\infty}\omega_{۱}(x_n,x_m)=\circ،$$

(۳) M را $\omega-$بسته گوییم هرگاه نقطه $\omega-$حدی هر دنباله‌ای که در M قرار دارد نیز نقطه‌ای از M باشد،

(۴) M را $\omega-$کامل گوییم هرگاه هر دنباله $\omega-$کوشی در آن $\omega-$همگرا به نقطه‌ای در M باشد،

(۵) M را $\omega-$کامل گوییم هرگاه داشته باشیم

$$\delta_\omega(M) = \sup\{\omega_1(x,y) : x,y \in M\} < \infty$$

صامت و همکارانش [۱۷] مفهوم نگاشت $\alpha-$پذیرفتنی را به‌صورت زیر تعریف کردند.

تعریف ۴. [۱۷] فرض کنید T یک خودنگاشت روی X و $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ یک تابع باشد. گوییم T یک نگاشت $\alpha-$پذیرفتنی است هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$\alpha(x,y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx,Ty) \geq 1$$

کاراپینار و همکاران [۱۴] نگاشت $\alpha-$ پذیرفتنی مثلثی را به‌صورت زیر تعریف کردند.

تعریف ۵. [۱۴] فرض کنید T یک خودنگاشت روی X و $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ یک تابع باشد. گوییم T یک نگاشت $\alpha-$پذیرفتنی مثلثی است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

$$(I)\ \alpha(x,y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx,Ty) \geq 1,$$

$$(II)\ \begin{cases} \alpha(x,z) \geq 1 \\ \alpha(z,y) \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha(x,y) \geq 1$$

لم ۱. [۱۴] فرض کنید T یک نگاشت $\alpha-$پذیرفتنی مثلثی است. همچنین فرض کنید $x_0 \in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha(x_0,Tx_0) \geq 1$، دنباله $(x_n)_{n\geq 0}$ را به‌صورت $x_n = T^n x_0$ تعریف می‌کنیم. در این صورت به‌ازای هر $m,n \in \mathbb{N}$ که $m < n$ داریم، $\alpha(x_m,x_n) \geq 1$.

۲ نتایج اصلی

این فصل را با یک تبصره ساده ولی مفید شروع می‌کنیم.

تبصره ۲. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار باشد به‌طوری‌که ωمنظم است. در این صورت به‌ازای هر $x,y \in X_\omega$ که $x \neq y$ داریم، $\omega_\lambda(x,y) > 0$.

برهان: فرض کنید $x \neq y$. فرض کنید $\lambda > 0$ای وجود دارد به‌طوری‌که $\omega_\lambda(x,y) = 0$. حال از منظم بودن ω نتیجه می‌گیریم $x = y$ که یک تناقض است. □

نگاشت‌های انقباضی $\alpha-\omega-$میر–کیلر را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۶. فرض کنید T یک خودنگاشت روی فضای متری مدولار X_ωباشد. همچنین فرض کنید $\alpha : X_\omega \times X_\omega \to [0,\infty)$ یک تابع باشد. گوییم T یک نگاشت انقباضی $\alpha-\omega-$میر–کیلر است هرگاه برای هر $x,y \in X_\omega$ و هر $\varepsilon > 0$، $\delta(\varepsilon) > 0$ای وجود داشته باشد که

$$\begin{cases} \varepsilon \leq \omega_\lambda(x,y) < \varepsilon + \delta \\ \alpha(x,y) \geq 1 \end{cases} \qquad (1)$$
$$\Rightarrow \omega_\lambda(Tx,Ty) < \varepsilon.$$

تبصره ۳. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار باشد به‌طوری‌که ω منظم است. همچنین فرض کنید

T یک نگاشت انقباضی $\alpha-\omega-$مییر-کییلر باشد. بنابراین به‌ازای هر $x,y\in X$ و $\lambda>۰$ که $x\neq y$ و $\alpha(x\ ,\ y)\ge ۱$، داریم

$$\omega_\lambda(Tx\ ,Ty\ )<\omega_\lambda(x\ ,y\ ).$$

همچنین اگر $x=y$ آنگاه $\omega_\lambda(Tx\ ,Ty\ )=۰$. یعنی به‌ازای هر $x,y\in X$ و $\lambda>۰$ که $\alpha(x\ ,\ y)\ge ۱$، داریم

$$\omega_\lambda(Tx\ ,Ty\ )\le\omega_\lambda(x\ ,y\ ).$$

برهان: چون $x\neq y$ بنابراین از تبصره ۱ به‌ازای هر $\lambda>۰$ داریم: $\omega_\lambda(x\ ,y\ )>۰$. فرض کنید $\delta>۰$ و $\varepsilon=\omega_\lambda(x,y)$. پس

$$\omega_\lambda(x,y)<\omega_\lambda(x,y)+\delta=\varepsilon+\delta$$

در نتیجه از (۱) داریم

$$\omega_\lambda(Tx\ ,Ty\ )<\varepsilon=\omega_\lambda(x\ ,y\ ). \quad \square$$

حال آماده‌ایم اولین قضیه این مقاله را اثبات کنیم.

قضیه ۲. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار $\omega-$کامل باشد، به‌طوری‌که ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خودنگاشت روی X_ω و $\alpha: X_\omega\times X_\omega\to[۰,\infty)$ یک تابع باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار است:

(i) T یک نگاشت $\alpha-$پذیرفتنی مثلثی است،

(ii) T یک نگاشت انقباضی $\alpha-\omega-$مییر-کییلر است،

(iii) به‌ازای هر $\lambda>۰$، $x_۰\in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha(x_۰,Tx_۰)\ge ۱$ و $\omega_\lambda(x_۰,Tx_۰)<\infty$.

(iv) T یک نگاشت $\omega-$پیوسته است.

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به‌علاوه اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$ داشته باشیم $\alpha(x\ ,\ y)\ge ۱$، آن‌گاه نقطه ثابت منحصر به‌فرد است.

برهان: فرض کنید $x_۰\in X$ای وجود داشته باشد $\alpha(x_۰,Tx_۰)\ge ۱$. دنباله پیکارد $\{x_n\}_{n\ge۰}$ را به‌صورت $x_n=T^nx_۰=Tx_{n-۱}$ تعریف می‌کنیم. چون T یک نگاشت $\alpha-$پذیرفتنی مثلثی است بنابراین از لم ۱ به‌ازای هر $m,n\in\mathbb{N}$ که $m<n$ داریم، $\alpha(x_m,x_n)\ge ۱$. اگر $n_۰\ge۰$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x_۰=x_{n_۰+۱}$، آنگاه به وضوح T یک نقطه ثابت دارد. بنابراین برای هر $n\ge۰$ فرض می‌کنیم $x_n=x_{n+۱}$. در این صورت از تبصره ۱ برای $n\ge۰$ داریم $\omega_\lambda(x_n,x_{n+۱})>۰$. در نتیجه با به‌کاربردن تبصره ۲ داریم

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(x_n,x_{n+۱})&<\omega_\lambda(x_{n-۱},x_n)\\ &<\ldots<\omega_\lambda(x_۰,x_۱)<\infty.\end{aligned}$$

این نشان‌دهنده آن است که دنباله $\{c_n=\omega_\lambda(x_n,x_{n+۱})\}$ نزولی می‌باشد و $c_n=\omega_\lambda(x_n,x_{n+۱})<\infty$. پس دنباله $\{c_n\}$ به یک عدد غیرمنفی حقیقی میل می‌کند. آن عدد را c در نظر می‌گیریم. در ادامه نشان خواهیم داد که $c=۰$. بنابر برهان خلف فرض کنیم $c>۰$. در این صورت برای هر $n\ge۰$ داریم

$$۰<c<\omega_\lambda(x_n,x_{n+۱}). \qquad (۲)$$

فرض کنید $\varepsilon=c>۰$. درنتیجه بنابر فرض $\delta(\varepsilon)>۰$ای وجود دارد به‌طوری‌که (۱) برقرار است. از طرف دیگر بنابر تعریف ε، $n_۰\in\mathbb{N}$ای وجود دارد به‌طوری‌که

$$\varepsilon<c_{n_۰}=\omega_\lambda(x_{n_۰},x_{n_۰+۱})<\varepsilon+\delta.$$

حال از (۱) داریم

$$c_{n_\circ+1} = \omega_\lambda(x_{n_\circ+1}, x_{n_\circ+2}) = \omega_\lambda(Tx_{n_\circ}, Tx_{n_\circ+1}) < \varepsilon$$

که یک تناقض است. پس $c = \circ$. یعنی برای هر $\lambda > \circ$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \omega_\lambda(x_n, x_{n+1}) = \circ.$$

برای هر ε دلخواه $\delta(\varepsilon) > \circ$ای وجود دارد به‌طوری‌که (۱) برقرار است. بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد $\delta < \varepsilon$. چون $c = \circ$. بنابراین $N_\circ \in \mathbb{N}$ای وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $n \geq N_\circ$ داریم

$$c_{n-1} = \omega_\lambda(x_{n-1}, x_n) < \delta. \qquad (۳)$$

در ادامه نشان خواهیم داد که برای هر $k \geq N_\circ$، $l \in \mathbb{N}$ و $\lambda > \circ$ عبارت زیر برقرار است

$$\omega_\lambda(x_k, x_{k+l}) < \varepsilon \qquad (۴)$$

توجه داشته باشید که (۳) و (۴) برای $l = 1$ برقرارند. فرض کنید رابطه (۴) برای $m \in \mathbb{N}$ای برقرار باشد. یعنی

$$\omega_\lambda(x_k, x_{k+m}) < \varepsilon. \qquad (۵)$$

برای $l = m+1$ از (۳) و (۵) داریم

$$\omega_\lambda(x_{k-1}, x_{k+m}) \leq \omega_{\frac{\lambda}{2}}(x_{k-1}, x_k) + \omega_{\frac{\lambda}{2}}(x_k, x_{k+m}) < \varepsilon + \delta. \qquad (۶)$$

همچنین چون $k-1 < k+m$، بنابراین $\alpha(x_{k-1}, x_{k+m}) \geq 1$. حال اگر $\omega_\lambda(x_{k-1}, x_{k+m}) \geq \varepsilon$، لذا از (۱) و (۶) داریم

$$\omega_\lambda(x_k, x_{k+m+1}) = \omega_\lambda(Tx_{k-1}, Tx_{k+m}) < \varepsilon,$$

و این یعنی (۴) برقرار است.

اگر $\omega_\lambda(x_{k-1}, x_{k+m}) < \varepsilon$ آنگاه با به‌کاربردن تبصره ۲ به دست می‌آوریم

$$\omega_\lambda(x_k, x_{k+m+1}) = \omega_\lambda(Tx_{k-1}, Tx_{k+m}) \leq \omega_\lambda(x_{k-1}, x_{k+m}) < \varepsilon.$$

در نتیجه (۴) برای $l = m+1$ برقرار است. پس برای برای هر $l \in \mathbb{N}$ و $\lambda > \circ$ عبارت زیر برقرار است

$$\omega_\lambda(x_k, x_{k+l}) < \varepsilon$$

یعنی ثابت کردیم دنباله $(x_n)_{n\geq\circ}$، $\omega-$کوشی است. چون X_ω، $\omega-$کامل است، بنابراین $x^* \in X_\omega$ای وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} \omega_1(x_n, x^*) = \circ$. حال از $\omega-$پیوسته بودن T به دست می‌آوریم،

$$\lim_{n\to\infty} \omega_1(x_{n+1}, Tx^*) = \lim_{n\to\infty} \omega_1(Tx_n, Tx^*) = \circ.$$

پس می‌توان نوشت

$$\omega_2(x^*, Tx^*) \leq \omega_1(x^*, x_{n+1}) + \omega_1(x_{n+1}, Tx^*),$$

که با حدگیری از طرفین به‌دست می‌آوریم، $\omega_2(x^*, Tx^*) = \circ$. پس $x^* = Tx^*$، چون ω منظم است.

فرض کنید برای هر $x, y \in Fix(T)$ داشته باشیم $\alpha(x, y) \geq 1$. حال اگر $x \neq y$ آنگاه از تبصره ۲ به دست می‌آوریم

$$\omega_\lambda(x, y) = \omega_\lambda(Tx, Ty) < \omega_\lambda(x, y)$$

که این یک تناقض است، پس $x = y$. یعنی T یک نقطه ثابت منحصربه‌فرد دارد. □

برای خودنگاشت‌هایی که $\omega-$پیوسته نیستند قضیه زیر را داریم.

قضیه ۳. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار $\omega-$کامل باشد به‌طوری‌که ω منظم است. همچنین

فرض کنید T یک خودنگاشت روی X_ω و $\alpha : X_\omega \times X_\omega \to [0,\infty)$ یک تابع باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار است:

(i) T یک نگاشت $\alpha-$پذیرفتنی مثلثی است،

(ii) T یک نگاشت انقباضی $\alpha-\omega-$مییر-کییلر است،

(iii) به‌ازای هر $\lambda > 0$، $x_0 \in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ و $\omega_\lambda(x_0, Tx_0) < \infty$.

(iv) اگر $(x_n)_{n\geq 0}$ یک دنباله در X_ω باشد به‌طوری‌که $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ و $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X_\omega$، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\alpha(x_n, x) \geq 1$.

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به‌علاوه اگر برای هر $x, y \in Fix(T)$ داشته باشیم $\alpha(x , y) \geq 1$، آنگاه نقطه ثابت منحصربه‌فرد است.

برهان: فرض کنید $x_0 \in X$ای وجود داشته باشد $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$. همانند برهان قضیه ۲ دنباله پیکارد $\{x_n\}_{n\geq 0}$ را در نقطه آغارین x_0 طوری به‌دست می‌آوریم که $\omega-$کوشی باشد و به نقطه x^*، $\omega-$همگرا باشد. همچنین برای هر $n < m$ به‌دست آوردیم $\alpha(x_n, x_m) \geq 1$. پس از (iv) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم، $\alpha(x_n, x^*) \geq 1$. در نتیجه بنابر تبصره ۲ داریم

$$\omega_\lambda(x_{n+1}, Tx^*) = \omega_\lambda(Tx_n, Tx^*) \leq \omega_\lambda(x_n, x^*).$$

پس می‌توان نوشت

$$\lim_{n\to\infty} \omega_\lambda(x_{n+1}, Tx^*) = 0.$$

بنابراین

$$\omega_2(x^*, Tx^*) \leq \lim_{n\to\infty}[\omega_1(x^*, x_{n+1}) + \omega_1(x_{n+1}, Tx^*)] = 0$$

پس $x^* = Tx^*$، چون ω منظم است. دیگر قسمت‌ها همانند برهان قضیه ۲ انجام می‌شوند. □

مثال ۱. فرض کنید $X = \mathbb{R}$ به‌ازای هر $x, y \in X_\omega$ و هر $\lambda > 0$ به متر مدولار زیر مجهز شده باشد

$$\omega_\lambda(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}(|x| + |y|) & x \neq y, \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

همچنین $T : X_\omega \to X_\omega$ و $\alpha : X_\omega \times X_\omega \to [0,\infty)$ را به‌صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم

$$Tx = \begin{cases} \sin x^2 & x \in (-\infty, 0), \\ \frac{1}{8}x^8 & x \in [0,1], \\ \ln x + 1 & x \in (1,2), \\ \frac{1}{4}x^5 & (2,+\infty) \end{cases}$$

و

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \wedge y \in [0,1], \\ \frac{1}{9} & x \vee y \notin [0,1]. \end{cases}$$

اگر $\alpha(x, y) \geq 1$ آنگاه $x, y \in [0,1]$. از طرف دیگر برای هر $w \in [0,1]$، داریم $Tw \in [0,1]$. یعنی $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$. همچنین اگر $\alpha(x, y) \geq 1$ و $\alpha(y, z) \geq 1$ آنگاه $x, y, z \in [0,1]$. پس $\alpha(x, z) \geq 1$. در نتیجه T یک نگاشت $\alpha-$پذیرفتنی مثلثی است. اگر $(x_n)_{n\geq 0}$ یک دنباله در X_ω باشد به‌طوری‌که $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ و $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X_\omega$، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $x_n \in [0,1]$. این نتیجه می‌دهد $x \in [0,1]$. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\alpha(x_n, x) \geq 1$.

به‌وضوح $\alpha(0,T0)\geq 1$. فرض کنید $\alpha(x,y)\geq 1$ و $\varepsilon<\omega_{\lambda}(x,y)<\varepsilon+\delta$ که در آن $\varepsilon,\delta>0$. بنابراین $x,y\in[0,1]$ و $\frac{1}{\lambda}(|x|+|y|)<\varepsilon+\delta$. پس داریم

$$\begin{aligned}\omega_{\lambda}(Tx,Ty)&=\frac{1}{\lambda}(|Tx|+|Ty|)\\&=\frac{1}{8\lambda}(|x|^{2}+|y|^{2})\\&\leq\frac{1}{8\lambda}(|x|+|y|)\\&<\frac{1}{8}(\varepsilon+\delta).\end{aligned}$$

حال با قرار دادن $\delta\leq\frac{7}{8}\varepsilon$ شرط (۱) برقرار است. یعنی T یک نگاشت انقباضی $\alpha-\omega-$مییر-کییلر است. بنابراین همه شرایط قضیه ۲ برقرار است و T یک نقطه ثابت دارد.

اگر در قضیه ۲ به‌ازای هر $x,y\in X_{\omega}$ قرار دهیم $\alpha(x,y)=1$، آنگاه نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۱. فرض کنید X_{ω} یک فضای متری مدولار $\omega-$کامل باشد به‌طوری‌که ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خودنگاشت روی X_{ω} است.

(i) به‌ازای هر $\lambda>0$، $x_{0}\in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که $\omega_{\lambda}(x_{0},Tx_{0})<\infty$.

(ii) اگر برای هر $x,y\in X_{\omega}$ و هر $\varepsilon>0$، $\delta(\varepsilon)>0$ای وجود داشته باشد که

$$\begin{aligned}&\varepsilon\leq\omega_{\lambda}(x,y)<\varepsilon+\delta\\&\Rightarrow\omega_{\lambda}(Tx,Ty)<\varepsilon,\end{aligned}$$

در این صورت T یک نقطه ثابت منحصربه‌فرد دارد.

مثال ۲. فرض کنید $X=\mathbb{R}^{2}$ به متر مدولار زیر مجهز شده باشد

$$\begin{aligned}&\omega_{\lambda}((a_{1},b_{1}),(a_{2},b_{2}))\\&=\frac{3|a_{1}-a_{2}|}{2e^{\lambda}}+\frac{|b_{1}-b_{2}|}{e^{\lambda}}.\end{aligned}$$

به‌وضوح X_{ω} یک فضای متری مدولار $\omega-$کامل است. همچنین نگاشت $T:X_{\omega}\to X_{\omega}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$T(a,b)=\left(\frac{b}{2},a\right).$$

حال با قرار دادن $\delta\leq\frac{1}{2}\varepsilon$ شرط (ii) ازنتیجه ۱ برقرار است، یعنی T یک نقطه ثابت منحصربه‌فرد دارد (اینجا $x^{*}=(0,0)$ نقطه ثابت T است).

حال اگر فضای متری کامل $(\mathbb{R}^{2},d)$ را در نظر بگیریم که

$$d((x,y),(u,v))=|x-u|+|y-v|,$$

آنگاه نمی‌توان برای قضیه مییر-کییلر نقطه ثابت پیدا کرد. در حقیقت برای $\varepsilon=1$ و هر $\delta>0$ داریم

$$d((2,0),(1,0))=1<\varepsilon+\delta,$$

اما

$$d(T(2,0),T(1,0))=d((0,2),(0,1))=1\geq\varepsilon.$$

مثال ۳. فرض کنید مجموعه

$$X=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N},n\geq 4\}$$

به متر مدولار $\omega_{\lambda}(x,y)=\frac{|x-y|}{\lambda}$ مجهز شده باشد. به‌وضوح X_{ω} یک فضای متری مدولار $\omega-$کامل است. همچنین نگاشت $T:X_{\omega}\to X_{\omega}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Tx=x^{2}.$$

به‌وضوح $\omega_\lambda\left(\frac{۱}{۴},T\left(\frac{۱}{۴}\right)\right)<\infty$. حال با قرار دادن $\delta\leq\frac{۱}{۲}\varepsilon$ شرط (ii) ازنتیجه ۱ برقرار است، یعنی T یک نقطه ثابت منحصربه‌فرد دارد.

مثال ۴. فرض کنید مجموعه $X=\mathbb{R}$ به متر مدولار

$$\omega_\lambda(x,y)=\begin{cases}\infty & \lambda<|x-y|,\\ ۰ & \lambda\geq|x-y|\end{cases}$$

مجهز شده باشد. به وضوح X_ω یک فضای متری مدولار $\omega-$کامل است. همچنین نگاشت $T:X_\omega\to X_\omega$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Tx=x+k$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد که شرایط نتیجه ۱ برقرار است و T یک نقطه ثابت منحصربه‌فرد دارد.

۳ نتایجی از نوع مییر-کییلر در فضاهای متری مدولاری که به یک گراف مجهز شده است

همانطور که در [۱۸] آورده شده است، فرض کنید (X_ω,ω) یک فضای متری مدولار باشد و قطر ضرب دکارتی $X_\omega\times X_\omega$ را با Δ مشخص شده باشد. گراف جهت‌دار G را در نظر بگیرید که $V(G)$ مشخص کننده رئوس و $E(G)$ مشخص کننده یال‌ها در مجموعه X_ω است، و همچنین $E(G)$ شامل همه گره‌ها می‌باشد، یعنی $\Delta\subseteq E(G)$. فرض می‌کنیم که $E(G)$ یال‌های موازی نداشته باشد. پس گراف G را با $(V(G),E(G))$ مشخص می‌کنیم. به‌علاوه گراف G را گراف وزن‌دار درنظر می‌گیریم (صفحه ۳۰۹ از [۱۹] را ببینید) که در آن به هر یال فاصله بین رئوس آن را به عنوان وزن اختصاص می‌دهیم. اگر x و y دو رأس در گراف G باشند، آنگاه یک گذر از x به y به طول $N\in\mathbb{N}$ دنباله $(x_i)_{i=۰}^N$ از $N+1$ رأس است که $x_۰=x$، $x_N=y$ و $(x_{i-۱},x_i)$ ($i=۱,۲,\dots,N$).

تعریف ۷. [۱۸] فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد که به گراف G مجهز است. گوییم نگاشت $T:X\to X$ یک $G-$انقباضی باناخ یا ساده‌تر $G-$انقباضی است هرگاه T یال‌های G را حفظ کند، یعنی

$$(x,y)\in E(G)\Rightarrow(Tx,Ty)\in E(G)$$

و همچنین به‌ازای هر $x,y\in X$، $\alpha\in(۰,۱)$ای وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$d(Tx,Ty)\leq\alpha d(x,y).$$

تعریف ۸. [۱۸] فرض کنید $T:X\to X$ یک نگاشت باشد و $(x_i)_{i=۰}^N$ یک دنباله دلخواهی باشد که به x همگرا است و برای هر $n\in\mathbb{N}$، $(x_n,x_{n+۱})\in E(G)$. گوییم T یک نگاشت $G-$پیوسته است هرگاه $\lim_{n\to\infty}Tx_n=Tx$.

در این فصل نشان خواهیم داد که با استفاده ازنتایج به‌دست آمده، قضایای نقطه ثابت زیادی در فضای متری مدولار مجهز به گراف Gبه آسانی به‌دست می‌آیند.

تعریف ۹. فرض کنید T یک خودنگاشت روی فضای متری مدولار X_ω باشد که به گراف G مجهز است. گوییم T یک نگاشت انقباضی $G-\omega-$مییر-کییلر

است هرگاه برای هر $x,y\in X_\omega$ و هر $\varepsilon>0$، $\delta(\varepsilon)>0$ای وجود داشته باشد که

$$\begin{cases}\varepsilon\le\omega_\lambda(x,y)<\varepsilon+\delta\\ (x,y)\in E(G)\end{cases}\Rightarrow\omega_\lambda(Tx,Ty)<\varepsilon.$$

قضیه ۴. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار ω−کامل باشد که به گراف G مجهز است و ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خودنگاشت روی X_ω باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار می‌باشند:

(i) به‌ازای هر $\lambda>0$، $x_\circ\in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که $(x_\circ,Tx_\circ)\in E(G)$ و $\omega_\lambda(x_\circ,Tx_\circ)<\infty$،

(ii) T یک نگاشت ω−پیوسته است،

(iii) $(x,y)\in E(G)\Rightarrow(Tx,Ty)\in E(G)$،

(iv) $\begin{array}{l}(x,z),(z,y)\in E(G)\\ \Rightarrow(x,y)\in E(G).\end{array}$،

(v) T یک نگاشت انقباضی $G-\omega$−میر−کیلر است.

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به‌علاوه اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$ داشته باشیم $(x,y)\in E(G)$، آنگاه نقطه ثابت منحصربه‌فرد است.

برهان: تابع $\alpha:X_\omega\times X_\omega\to[0,\infty)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر $(x,y)\in E(G)$ آنگاه $\alpha(x,y)=2$ و در غیر این صورت $\alpha(x,y)=0$. اگر $\alpha(x,y)\ge 1$ آنگاه $(x,y)\in E(G)$. از طرف دیگر از (iii) داریم $(Tx,Ty)\in E(G)$. یعنی $\alpha(Tx,Ty)\ge 1$. همچنین اگر $\alpha(x,y)\ge 1$ و $\alpha(y,z)\ge 1$ آنگاه $(x,z),(z,y)\in E(G)$. پس از (iv) به‌دست می‌آوریم $\alpha(x,z)\ge 1$. در نتیجه T یک نگاشت α−پذیرفتنی مثلثی است. به‌آسانی از (i) به‌دست می‌آوریم $\alpha(x_\circ,Tx_\circ)\ge 1$.

فرض کنید $\alpha(x,y)\ge 1$ و

$$\varepsilon<\omega_\lambda(x,y)<\varepsilon+\delta$$

که در آن $\varepsilon,\delta>0$. بنابراین $(x,y)\in E(G)$ و

$$\varepsilon<\omega_\lambda(x,y)<\varepsilon+\delta.$$

بنابراین از (v) نتیجه می‌گیریم $\omega_\lambda(Tx,Ty)<\varepsilon$. پس ثابت کردیم T یک نگاشت انقباضی $\alpha-\omega$−میر−کیلر است. از این رو همه شرایط برقرار است و T یک نقطه ثابت دارد. همچنین اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$ داشته باشیم $(x,y)\in E(G)$، آنگاه برای هر $x,y\in Fix(T)$ خواهیم داشت $\alpha(x,y)\ge 1$، که در این مورد نقطه ثابت T منحصربه‌فرد است. □

قضیه ۵. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار ω−کامل باشد که به گراف G مجهز است و ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خودنگاشت روی X_ω باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار می‌باشند:

(i) به‌ازای هر $\lambda>0$، $x_\circ\in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که $(x_\circ,Tx_\circ)\in E(G)$ و $\omega_\lambda(x_\circ,Tx_\circ)<\infty$،

(ii) $(x,y)\in E(G)\Rightarrow(Tx,Ty)\in E(G)$،

$$\begin{matrix}(x,z),(z,y)\in E(G)\\ \Rightarrow (x,y)\in E(G).\end{matrix} \quad (iii)$$

(iv) T یک نگاشت انقباضی $G-\omega-$میر-کییلر است،

(iv) اگر $(x_n)_{n\geq \cdot}$ یک دنباله در X_ω باشد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X_\omega \text{ و } (x_n, x_{n+1}) \in E(G),$$

آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $(x_n,x)\in E(G)$. در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به‌علاوه اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$ داشته باشیم $(x\ ,y)\in E(G)$ ، آنگاه نقطه ثابت منحصربه‌فرد است.

برهان: فرض کنید تابع $\alpha: X_\omega \times X_\omega \to [\cdot,\infty)$ همان تابع در برهان قضیه ۴۳ باشد. همانند برهان قضیه ۴ می‌توانیم بررسی کنیم که شرایط (i) تا (iii) از قضیه ۳ برقرارند. اگر $(x_n)_{n\geq \cdot}$ یک دنباله در X_ω باشد به‌طوری‌که $\alpha(x_n,x_{n+1})\geq ۱$ و

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X_\omega,$$

آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $(x_n,x_{n+1})\in E(G)$، که از (iv) نتیجه می‌گیریم $(x_n,x)\in E(G)$. پس برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\alpha(x_n,x)\geq ۱$. بنابراین همه شرایط (i) تا (iv) از قضیه ۳ برقرارند. در نتیجه T یک نقطه ثابت دارد. همچنین اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$ داشته باشیم $(x\ ,y)\in E(G)$، آنگاه برای هر $x,y\in Fix(T)$ خواهیم داشت $\alpha(x,y)\geq ۱$، که در این مورد نقطه ثابت T منحصربه‌فرد است. □

۴ نتایجی از نوع میر-کییلر در فضاهای متری مدولاری که به یک ترتیب جزئی مجهز شده‌اند

بررسی وجود نقاط ثابت در مجموعه‌های جزئی در [۲۰] انجام شد. اگر X_ω یک فضای متری مدولار و $(X_\omega,\leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد، در آن صورت گوییم X_ω یک فضای متری مدولار مرتب جزئی است. دو عنصر x و y از X_ω را مقایسه‌پذیر گوییم هرگاه $x\leq y$ یا $y\leq x$. نگاشت $T:X\to X$ را صعودی نامیم هرگاه $x\leq y$ نتیجه دهد $Tx\leq Ty$.

تعریف ۱۰. فرض کنید T یک خودنگاشت روی فضای متری مدولار X_ω باشد که به ترتیب جزئی $\leq$ مجهز است. گوییم T یک نگاشت انقباضی $\omega-$ میر-کییلر جزئی است هرگاه برای هر $x,y\in X_\omega$ و هر $\varepsilon>\cdot$، $\delta(\varepsilon)>\cdot$ای وجود داشته باشد که

$$\begin{cases}\varepsilon\leq\omega_\lambda(x,y)<\varepsilon+\delta\\ x\leq y\end{cases}\Rightarrow \omega_\lambda(Tx,Ty)<\varepsilon.$$

قضیه ۶. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار $\omega-$کامل باشد که به ترتیب جزئی $\leq$ مجهز است و ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خودنگاشت روی X_ω باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار می‌باشند:

(i) به‌ازای هر $\lambda>\cdot$، $x_\cdot\in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که $x_\cdot\leq Tx_\cdot$ و $\omega_\lambda(x_\cdot,Tx_\cdot)<\infty$،

(ii) T یک نگاشت $\omega-$پیوسته است،

(iii) T یک نگاشت صعودی است،

(iv) T یک نگاشت انقباضی ω−مییر−کییلر جزئی است.

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به‌علاوه اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$ داشته باشیم $x\le y$، آنگاه نقطه ثابت منحصربه‌فرد است.

برهان: تابع $\alpha: X_\omega\times X_\omega\to[0,\infty)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر $x\le y$ آنگاه $\alpha(x,y)=2$ و در غیر این صورت $\alpha(x,y)=0$. اگر $\alpha(x,y)\ge 1$ آنگاه $x\le y$. از طرف دیگر از (iii) داریم $Tx\le Ty$. یعنی $\alpha(Tx,Ty)\ge 1$. همچنین اگر $\alpha(x,y)\ge 1$ و $\alpha(y,z)\ge 1$ آنگاه $x\le y$ و $y\le z$. پس به‌دست می‌آوریم $\alpha(x,z)\ge 1$. در نتیجه T یک نگاشت α−پذیرفتنی مثلثی است. به آسانی از (i) به دست می‌آوریم $\alpha(x_0,Tx_0)\ge 1$.

فرض کنید $\alpha(x,y)\ge 1$ و

$$\varepsilon<\omega_\lambda(x,y)<\varepsilon+\delta$$

که در آن $\varepsilon,\delta>0$. بنابراین $x\le y$ و $\varepsilon<\omega_\lambda(x,y)<\varepsilon+\delta$. بنابراین از (iv) نتیجه می‌گیریم $\omega_\lambda(Tx,Ty)<\varepsilon$. پس ثابت کردیم T یک نگاشت انقباضی $\alpha-\omega$−مییر−کییلر است. از این رو همه شرایط برقرار است و T یک نقطه ثابت دارد. همچنین اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$ داشته باشیم $x\le y$، آنگاه برای هر $x,y\in Fix(T)$ خواهیم داشت $\alpha(x,y)\ge 1$، که در این مورد نقطه ثابت T منحصربه‌فرد است. □

قضیه ۷. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار ω−کامل باشد که به ترتیب جزئی $\preceq$ مجهز است و ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خودنگاشت روی X_ω باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار می‌باشند:

(i) به‌ازای هر $\lambda>0$، $x_0\in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که $x_0\le Tx_0$ و $\omega_\lambda(x_0,Tx_0)<\infty$،

(ii) T یک نگاشت صعودی است،

(iii) T یک نگاشت انقباضی $G-\omega$−مییر−کییلر است،

(v) اگر $(x_n)_{n\ge 0}$ یک دنباله صعودی در X_ω باشد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} x_n=x\in X_\omega$، آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $x_n\le x$.

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به‌علاوه اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$ داشته باشیم $x\le y$، آنگاه نقطه ثابت منحصر به فرد است.

برهان: فرض کنید تابع $\alpha: X_\omega\times X_\omega\to[0,\infty)$ همان تابع در برهان قضیه ۶ باشد. همانند برهان قضیه ۶ می توانیم بررسی کنیم که شرایط (i) تا (iii) از قضیه ۳ برقرارند. اگر $(x_n)_{n\ge 0}$ یک دنباله صعودی در X_ω باشد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} x_n=x\in X_\omega$. آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $x_n\le x_{n+1}$، که از (v) نتیجه می‌گیریم $x_n\le x$. پس برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\alpha(x_n,x)\ge 1$. بنابراین همه شرایط (i) تا (iv) از قضیه ۳ برقرارند. درنتیجه T یک نقطه ثابت دارد. همچنین اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$ داشته باشیم $x\le y$، آنگاه برای هر $x,y\in Fix(T)$ خواهیم

داشت $\alpha(x,y)\geq 1$، که در این مورد نقطه ثابت T منحصربه‌فرد است. □

۵ انقباضی‌هایی از نوع انتگرالی

فرض کنید Φ مجموعه همه نگاشت‌های $\phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(۱) هر $\phi\in\Phi$ روی زیر مجموعه‌های فشرده $[0,+\infty)$ تابع لبگ اندازه‌پذیر است،

(۲) برای هر $\phi\in\Phi$ و هر $\varepsilon>0$، داریم

$$\int_0^{\varepsilon}\phi(\tau)d\tau>0.$$

با روش مشابه با برهان قضایای قبل ما می‌توانیم نتایج زیر را به دست بیاوریم.

قضیه ۸ فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار $\omega-$کامل باشد به‌طوری‌که ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خودنگاشت روی X_ω و $\alpha:X_\omega\times X_\omega\to[0,\infty)$ یک تابع باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار است:

(i) T یک نگاشت $\alpha-$پذیرفتنی مثلثی است،

(ii) برای هر $x,y\in X_\omega$ و هر $\varepsilon>0$، $\delta(\varepsilon)>0$ای وجود داشته باشد که

$$\begin{cases}\varepsilon\leq\int_0^{\omega_\lambda(x,y)}\phi(\tau)d\tau<\varepsilon+\delta\\ \alpha(x,y)\geq 1\end{cases}\Rightarrow\int_0^{\omega_\lambda(Tx,Ty)}\phi(\tau)d\tau<\varepsilon.$$

(iii) به‌ازای هر $\lambda>0$، $x_0\in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha(x_0,Tx_0)\geq 1$ و $\omega_\lambda(x_0,Tx_0)<\infty$.

(iv) T یک نگاشت $\omega-$پیوسته است.

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به‌علاوه اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$ داشته باشیم $\alpha(x,y)\geq 1$، آنگاه نقطه ثابت منحصربه‌فرد است.

قضیه ۹. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار $\omega-$کامل باشد به‌طوری‌که ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خودنگاشت روی X_ω و $\alpha:X_\omega\times X_\omega\to[0,\infty)$ یک تابع باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار است:

(i) T یک نگاشت $\alpha-$پذیرفتنی مثلثی است،

(ii) برای هر $x,y\in X_\omega$ و هر $\varepsilon>0$، $\delta(\varepsilon)>0$ای وجود داشته باشد که

$$\begin{cases}\varepsilon\leq\int_0^{\omega_\lambda(x,y)}\phi(\tau)d\tau<\varepsilon+\delta\\ \alpha(x,y)\geq 1\end{cases}\Rightarrow\int_0^{\omega_\lambda(Tx,Ty)}\phi(\tau)d\tau<\varepsilon.$$

(iii) به‌ازای هر $\lambda>0$، $x_0\in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha(x_0,Tx_0)\geq 1$ و $\omega_\lambda(x_0,Tx_0)<\infty$.

(iv) اگر $(x_n)_{n\geq 0}$ یک دنباله در X_ω باشد به‌طوری‌که $\alpha(x_n,x_{n+1})\geq 1$ و $\lim_{n\to\infty}x_n=x\in X_\omega$، آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $\alpha(x_n,x)\geq 1$.

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به‌علاوه اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$ داشته باشیم $\alpha(x,y)\geq 1$، آنگاه نقطه ثابت منحصربه‌فرد است.

قضیه ۱۰. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار $\omega-$کامل باشد که به گراف G مجهز است و ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خودنگاشت روی X_ω باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار می‌باشند:

(i) به‌ازای هر $\lambda > 0$، $x_0 \in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که

$(x_0, Tx_0) \in E(G)$ و $\omega_\lambda(x_0, Tx_0) < \infty$،

(ii) T یک نگاشت $\omega-$پیوسته است،

(iii) $(x,y) \in E(G) \Rightarrow (Tx,Ty) \in E(G)$،

(iv) $(x,z),(z,y) \in E(G) \Rightarrow (x,y) \in E(G)$،

(v) برای هر $x,y \in X_\omega$ و هر $\varepsilon > 0$، $\delta(\varepsilon) > 0$ای وجود داشته باشد که

$$\begin{cases} \varepsilon \le \int_0^{\omega_\lambda(x,y)} \phi(\tau) d\tau < \varepsilon + \delta \\ (x,y) \in E(G) \end{cases} \Rightarrow \int_0^{\omega_\lambda(Tx,Ty)} \phi(\tau) d\tau < \varepsilon.$$

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به‌علاوه اگر برای هر $x,y \in Fix(T)$ داشته باشیم $(x, y) \in E(G)$، آنگاه نقطه ثابت منحصربه‌فرد است.

قضیه ۱۱. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار $\omega-$کامل باشد که به گراف G مجهز است و ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خودنگاشت روی X_ω باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار می‌باشند:

(i) به‌ازای هر $\lambda > 0$، $x_0 \in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که

$(x_0, Tx_0) \in E(G)$ و $\omega_\lambda(x_0, Tx_0) < \infty$،

(ii) $(x,y) \in E(G) \Rightarrow (Tx,Ty) \in E(G)$،

(iii) $(x,z),(z,y) \in E(G) \Rightarrow (x,y) \in E(G)$،

(iv) برای هر $x,y \in X_\omega$ و هر $\varepsilon > 0$، $\delta(\varepsilon) > 0$ای وجود داشته باشد که

$$\begin{cases} \varepsilon \le \int_0^{\omega_\lambda(x,y)} \phi(\tau) d\tau < \varepsilon + \delta \\ (x,y) \in E(G) \end{cases} \Rightarrow \int_0^{\omega_\lambda(Tx,Ty)} \phi(\tau) d\tau < \varepsilon.$$

(iv) اگر $(x_n)_{n\geq 0}$ یک دنباله در X_ω باشد به‌طوری‌که

$(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ و $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X_\omega$،

آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $(x_n, x) \in E(G)$.

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به‌علاوه اگر برای هر $x,y \in Fix(T)$ داشته باشیم $(x, y) \in E(G)$، آنگاه نقطه ثابت منحصربه‌فرد است.

قضیه ۱۲. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار $\omega-$کامل باشد که به ترتیب جزئی $\preceq$ مجهز است و ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خودنگاشت روی X_ω باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار می‌باشند:

(i) به‌ازای هر $\lambda > 0$، $x_0 \in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که $x_0 \preceq Tx_0$ و $\omega_\lambda(x_0, Tx_0) < \infty$،

(ii) T یک نگاشت $\omega-$پیوسته است،

(iii) T یک نگاشت صعودی است،

(iv) برای هر $x,y \in X_\omega$ و هر $\varepsilon > 0$، $\delta(\varepsilon) > 0$ای وجود داشته باشد که

$$\begin{cases} \varepsilon \le \int_{0}^{\omega_\lambda(x,y)} \phi(\tau)d\tau < \varepsilon+\delta \\ x \le y \end{cases} \Rightarrow \int_{0}^{\omega_\lambda(Tx,Ty)} \phi(\tau)d\tau < \varepsilon,$$

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به‌علاوه اگر برای هر $x,y \in Fix(T)$ داشته باشیم $x \le y$، آنگاه نقطه ثابت منحصربه‌فرد است.

قضیه ۱۳. فرض کنید X_ω یک فضای متری مدولار $\omega-$کامل باشد که به ترتیب جزئی $\le$ مجهز است و ω منظم است. همچنین فرض کنید T یک خودنگاشت روی X_ω باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار می‌باشند:

(i) به‌ازای هر $\lambda > 0$، $x_0 \in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که $x_0 \le Tx_0$ و $\omega_\lambda(x_0, Tx_0) < \infty$،

(ii) T یک نگاشت صعودی است،

(iii)برای هر $x,y \in X_\omega$ و هر $\varepsilon > 0$، $\delta(\varepsilon) > 0$ای وجود داشته باشد که

$$\begin{cases} \varepsilon \le \int_{0}^{\omega_\lambda(x,y)} \phi(\tau)d\tau < \varepsilon+\delta \\ x \le y \end{cases} \Rightarrow \int_{0}^{\omega_\lambda(Tx,Ty)} \phi(\tau)d\tau < \varepsilon,$$

(iv) اگر $(x_n)_{n\ge 0}$ یک دنباله صعودی در X_ω باشد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X_\omega$، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $x_n \le x$.

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد. به‌علاوه اگر برای هر $x,y \in Fix(T)$ داشته باشیم $x \le y$، آنگاه نقطه ثابت منحصربه‌فرد است.

References

[1] V.V. Chistyakov, Modular metric spaces, I: basic concepts, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 72 (2010) 1-14.

[2] V.V. Chistyakov, Modular metric spaces, II: application to superposition operators, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 72 (2010) 15-30.

[3] H. Nakano, Modulared semi-ordered linear spaces, Maruzen Co.1950.

[4] J. Musielak, Orlicz spaces and modular spaces, Lecture notes in Mathematics, 1034 (1983) 1-216.

[5] W. Orlicz, Collected Papers, Parts I, II, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1988.

[6] L. Diening, Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids, 2002.

[7] P. Harjulehto, P. Hästö, M. Koskenoja, S. Varonen, The Dirichlet energy integral and variable exponent Sobolev spaces with zero boundary values, Potential Analysis, 25 (2006) 205-222.

[8] J. Heinonen, T. Kilpelainen, O. Martio, Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations, Clarendon, Oxford, 1993.

[9] M.A. Khamsi, W. Kozlowski, S. Reich, Fixed point theory in modular function spaces, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 14 (1990) 935-953.

[10] M.A. Khamsi, W.A. Kirk, An introduction to metric spaces and fixed point theory, John

Wiley & Sons, 2011.

[11]W. Kozlowski, Modular Function Spaces, Series of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 122, Dekker, New York, 1988.

[12]A. Meir, E. Keeler, A theorem on contraction mappings, J. Math. Anal. Appl., 28 (1969) 326-329.

[13]J. Jachymski, Equivalent conditions and the Meir-Keeler type theorems, J. Math. Anal. Appl., 194 (1995) 293-303

[14]E. Karapnar, P. Kuman, P. Salimi, On--Meir-Keeler contractive mappings, Fixed Point Theory Appl., 94 (2013) 13.

[15]S. Park ,Meir-Keeler type contractive conditions, Math. Japonica, 16 (1981) 13-20.

[16]A.A. Abdou, M.A. Khamsi, On the fixed points of nonexpansive mappings in modular metric spaces, Fixed Point Theory Appl., 2013 (2013) 229.

[17]B. Samet, C. Vetro, P .Vetro, Fixed point theorems for α–ψ-contractive type mappings, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 75 (2012) 2154-2165.

[18]J. Jachymski, The contraction principle for mappings on a metric space with a graph, Proc. Amer. Math. Soc., 136 (2008) 1359-1373.

[19]R. Johnsonbaugh, Discrete Mathematics (Fourth Edition), Upper Saddle River. NJ: Prentics Hal1. intemationa1, (1997) 257-280.

[20] A.C. Ran, M.C. Reurings, A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations, Proc. Amer. Math. Soc., (2004) 1435-1443.