Complex and Nonlinear Systems
Vol. 1, No. 1, Autumn 2017, pp. 39-46
سیستم‌های مختلط و غیرخطی
سال ۱، دوره ۱، شماره ۱، پاییز ۱۳۹۶، صص ۳۹ تا ۴۶

روش شبه‌طیفی مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل مسئله غیرخطی کلین–گوردن

بابک آذرنوید[۱،*]، کوروش پرند[۲]

۱. پژوهشگر پسادکتری، گروه علوم کامپیوتر، دانشکده ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی
۲. استاد، گروه علوم کامپیوتر، دانشکده ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی
استاد، گروه مدل‌سازی شناختی، پژوهشکده علوم شناختی و مغز، دانشگاه شهید بهشتی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۳/۱۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۵/۲۵

The pseudo-spectral method based on the reproducing kernel Hilbert spaces for solving the nonlinear Klein-Gordon problem

Babak Azarnavid[1,*], Kourosh Parand[2]

1. Postdoc Researcher, Department of Computer Sciences, Faculty of Mathematics, Shahid Beheshti University
2. Professor, Department of Computer Sciences, Faculty of Mathematics, Shahid Beheshti University
Professor, Department of Cognitive modeling, Institute for Cognitive Sciences and Brain, Shahid Beheshti University

Received: 6/1/2017 Accepted: 8/16/2017

چکیده: در این مقاله روش شبه‌طیفی مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل مسئله غیرخطی کلین–گوردن معرفی خواهد شد. به منظور تقریب مشتق‌های مکانی مسئله از ماتریس های عملیاتی به دست آمده با استفاده ازهسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت وهمچنین به منظور گسسته سازی بعد زمانی مسئله از روش رانگ کوتای مرتبه چهار استفاده می‌کنیم. استفاده از ماتریس‌های عملیاتی به دست آمده با استفاده ازهسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت همچنین اعمال دقیق شرایط مرزی بر روی پایه ها از مزایای روش معرفی شده هستند. در پایان چند مثال برای نشان دادن کارایی و توانایی روش برای حل مسائل غیرخطی وابسته به زمان ارائه شده است.

کلمات کلیدی: هسته بازتولیدی فضای هیلبرت، روش شبه‌طیفی، مسئله کلین–گوردن، روش رانگ کوتا.

Abstract: In this paper, a pseudo-spectral method based on the reproducing kernels of Hilbert spaces will be introduced to solve the nonlinear Klein-Gordon problem. In order to approximate the spatial derivatives of the problem, we use the operational matrices obtained by the reproducing kernels of Hilbert spaces and also a fourth order Runge-Kutta method is used to discretize the time domain. Using reproducing kernel Hilbert space operational matrices and enforce the basis functions to satisfy the boundary conditions exactly are the main advantages of the proposed method. Several examples are presented to illustrate the efficiency and ability of the method for solving nonlinear time dependent problems.

Keywords: Reproducing kernel Hilbert space, Pseudo-spectral method, Klein-Gordon problem, Runge-Kutta Method.

۱ مقدمه

مسائل غیرخطی از جمله مسئله کلین-گوردن در بسیاری از مسائل کاربردی فیزیکی از جمله فیزیک

*نویسنده مسئول

Corresponding author: babakazarnavid@yahoo.com

پلاسما و فیزیک حالت جامد [۱، ۲] ظاهر می‌شوند. مسئله مقدار اولیه غیرخطی کلین-گوردن به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha\nabla^2 u+\mathcal{N}(u)=f\ (\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{x}\in[a,b],t\ge 0 \tag{1}$$

همراه با شرایط اولیه

$$u(x,0)=u_0(x),\partial_t u(x,0)=v_0(x)$$

و شرایط مرزی دیریکله، که در آن $u=u(x,t)$ بیانگر جابجایی موج در موقعیت x و زمان t، α یک ثابت معین و $\mathcal{N}(u)$ یک تابع غیرخطی است.

در سال‌های اخیر پژوهش‌های زیادی در زمینه کاربرد هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت در آنالیز عددی و روش‌های محاسباتی انجام شده است که از جمله می‌توان به حل عددی معادلات با مشتقات جزئی با استفاده از روش‌های گالرکین و هم‌محلی [۳] جواب‌های چندگانه مسائل غیرخطی مقدار مرزی [۴]، تقریب معادلات با مشتقات جزئی تصادفی [۵]، حل عددی معادلات انتگرالی [۶] و کاربرد هسته‌ها در روش‌های یادگیری ماشین [۷] اشاره کرد. روش‌های مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت به‌صورت موفقیت‌آمیزی بر روی بسیاری از مسائل غیرخطی به کار رفته‌اند، به عنوان مثال حل دستگاه غیرخطی مسائل مقدار مرزی، مسائل با نقطه بازگشت منفرد و مسائل غیرخطی در پدیده‌های ستاره شناسی [۸-۱۱]. در اینجا ما هسته‌های بازتولیدی را برای تولید ماتریس‌های عملیاتی به‌کار برده و با استفاده از ترکیب روش شبه‌طیفی با روش رانگ کوتا به حل مسئله غیرخطی وابسته به زمان کلین-گوردن می‌پردازیم. هسته‌های بازتولیدی طوری ساخته می‌شوند که در شرایط مرزی مسئله به طور دقیق صدق کنند. در پایان چند مثال برای نشان دادن کارایی و توانایی روش برای حل مسائل غیرخطی وابسته به زمان ارائه شده است.

۲ روش حل

در این بخش، روش شبه‌طیفی مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل مسئله (۱) همراه با شرایط مقدار اولیه و شرایط مرزی دیریکله به‌کار برده خواهد شد. ابتدا به کمک تابع مناسب $h(x)$ شرایط مرزی را همگن‌سازی می‌کنیم. بعد از همگن سازی شرایط به‌صورت زیر

$$u(x,t)=v\ (x,t)+h(x) \tag{2}$$

مسئله را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\alpha\nabla^2 v+\mathcal{N}(v+h)=f\ (\boldsymbol{x},t)-\alpha\nabla^2 h, \\ \qquad\qquad \boldsymbol{x}\in[a,b],t\ge 0, \\ v\ (x,0)=u_0(x)-h(x),\partial_t v\ (x,0)=v_0(x), \\ \qquad\qquad \boldsymbol{x}\in[a,b] \\ v\ (a,t)=0,\ \ v\ (b,t)=0. \\ \qquad\qquad t\ge 0\end{cases} \tag{3}$$

حال هدف حل مسئله فوق با استفاده از روش شبه‌طیفی مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت است. بنابراین ابتدا به معرفی هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت می‌پردازیم.

به منظور حل مسئله (۳) فضاهای هیلبرت با هسته بازتولیدی $m\ge 3,W_{2,0}^m[a,b],W_2^m[a,b]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱. فضای ضرب داخلی $W_2^m\left[a,b\right]$ را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$W_2^m\left[a,b\right]=\{u\left(x\right)|\ u^{(m)}\in L^2\left[a,b\right]$$

$u^{(m-1)}$ به‌طور مطلق پیوسته است، $\}$.

ضرب داخلی فضای $W_2^m\left[a,b\right]$ را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\left(u\left(.\right),v\left(.\right)\right)_{W_2^m}&=\sum_{i=0}^{m-1}u^{(i)}\left(0\right)v^{(i)}\left(0\right)\\&+\int_a^b u^{(m)}\left(x\right)v^{(m)}\left(x\right)dx\end{aligned}\qquad(۴)$$

همچنین نرم $\|u\|$ را به‌صورت

$$\|u\|_{W_2^m}=\sqrt{\left(u,v\right)_{W_2^m}}$$

خواهیم داشت که در آن $u,v\in W_2^m\left[a,b\right]$.

قضیه ۱. فضای $W_2^m\left[a,b\right]$ یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی است. یعنی برای هر $u\left(.\right)\in W_2^m\left[a,b\right]$ و هر $y\in\left[a,b\right]$ ثابت، هسته $R_y\left(.\right)\in W_2^m\left[a,b\right]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\left(u\left(.\right),R_y\left(.\right)\right)_{W_2^m}=u\left(y\right).$$

هسته بازتولیدی $R_y\left(.\right)$ به‌صورت زیر است:

$$R_y\left(x\right)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{2m}c_i\left(y\right)x^{i-1}, & x\le y,\\ \sum_{i=1}^{2m}d_i\left(y\right)x^{i-1}, & x\ge y.\end{cases}\qquad(۵)$$

برهان. به [۸] مراجعه شود.

تعریف ۲. فضای ضرب داخلی $W_{2,0}^m\left[a,b\right]$ را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$W_{2,0}^m\left[a,b\right]=\{u\left(x\right)|$ $u^{(m-1)}$ به‌طور مطلق پیوسته است $,u^{(m)}\in L^2\left[a,b\right]$ and $u\left(a\right)=u\left(b\right)\}$.

ضرب داخلی فضای $W_{2,0}^m\left[a,b\right]$ یک زیرفضای $W_2^m\left[a,b\right]$ بوده و ضرب داخلی و نرم آن مشابه فضای $W_2^m\left[a,b\right]$ خواهد بود. برای مشاهده جزئیات بیشتر در مورد فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی $W_2^m\left[a,b\right]$ و $W_{2,0}^m\left[a,b\right]$ و روش به دست آوردن هسته بازتولیدی آنها به [۸] و مراجع ذکر شده در آنها مراجعه کنید.

حال فرض کنید $R_y\left(x\right)$ هسته بازتولیدی فضای $W_{2,0}^m\left[a,b\right]$ است و قرار دهید

$$\psi_j\left(x\right)=R_{x_j}\left(x\right)$$

که در آن $\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ یک مجموعه چگال در $\left[a,b\right]$ است، در این صورت $\left\{\psi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ یک مجموعه کامل در $W_{2,0}^m\left[a,b\right]$ است [۸، ۹]. در روش شبه‌طیفی مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی، توابع $\left\{\psi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ به عنوان توابع پایه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

ابتدا روش شبه‌طیفی به‌صورت خلاصه معرفی خواهد شد. یافتن جواب در یک مجموعه گسسته از نقاط یکی از ویژگی‌های مهم روش شبه‌طیفی است. معمولاً در روش‌های شبه‌طیفی جواب مسئله به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u_N\left(x\right)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\psi_j\left(x\right).\qquad(۶)$$

در نقاط $x_i,i=1,\ldots,N$ از توابع پایه‌ای $\psi_j\left(x\right)$ استفاده می‌کنیم و تقریب تابع $u\left(x\right)$ را در نقاط گره‌ای $x_i,i=1,\ldots,N$ به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u_N(x_i)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\psi_j(x_i), \quad i=1,\dots,N, \tag{۷}$$

که فرم ماتریسی آن را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{u}=A\boldsymbol{\lambda}, \tag{۸}$$

که در آن $\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1,\dots,\lambda_N]^T$ بردار ضرایب، A ماتریس درون‌یاب با عناصر $A_{i,j}=\psi_j(x_i)$ و $\boldsymbol{u}=[u_N(x_1),\dots,u_N(x_N)]^T$ می‌باشند. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک عملگر خطی باشد، با اعمال این عملگر بر $u_N(x)$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}u_N=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\mathcal{L}\psi_j(x), \tag{۹}$$

اگر نقاط $x_i, i=1,\dots,N$ در رابطه فوق قرار گیرند، دستگاه ماتریسی زیر را خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{Lu}=A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\lambda}, \tag{۱۰}$$

که در آن $\boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{\lambda}$ مانند قبل بوده و مؤلفه‌های ماتریس $A_{\mathcal{L}}$ به‌صورت $(A_{\mathcal{L}})_{i,j}=\mathcal{L}\psi_j(x_i)$ خواهند بود. با استفاده از فرم ماتریسی $\boldsymbol{u}=A\boldsymbol{\lambda}$ بردار ضرایب را به‌صورت $\boldsymbol{\lambda}=A^{-1}\boldsymbol{u}$ خواهیم داشت، سپس با استفاده از رابطه قبل داریم:

$$\boldsymbol{Lu}=A_{\mathcal{L}}A^{-1}\boldsymbol{u}, \tag{۱۱}$$

بنابراین ماتریس عملیاتی $\boldsymbol{L}$ متناظر با عملگر $\mathcal{L}$ را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{L}=A_{\mathcal{L}}A^{-1}. \tag{۱۲}$$

معکوس‌پذیری ماتریس درون‌یاب A برای به‌دست آوردن ماتریس عملیاتی $\boldsymbol{L}$ ضروری است. در حالت کلی معکوس‌پذیری ماتریس درون‌یاب A به پایه‌های مورد استفاده و همچنین نقاط گره‌ای $x_i, i=1,\dots,N$ وابسته است. در هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت با توجه به معین و مثبت بودن هسته معکوس‌پذیری ماتریس درون‌یاب برای هر مجموعه از نقاط دوبه‌دو مجزا تضمین می‌شود. با نادیده گرفتن شرایط مرزی فرض کنید معادله دیفرانسیل خطی زیر را داریم:

$$\mathcal{L}u=f.$$

جواب تقریبی را می‌توان با حل دستگاه خطی ماتریسی زیر به دست آورد:

$$\boldsymbol{Lu}=\boldsymbol{f},$$

که در آن مؤلفه‌های بردارهای $\boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{f}$ مقادیر توابع u و f در نقاط گرهی و $\boldsymbol{L}$ ماتریس عملیاتی مربوط به عملگر دیفرانسیلی $\mathcal{L}$ هستند.

ابتدا مسئله کلین-گوردن (۱) را به‌صورت یک دستگاه معادلات مرتبه اول نسبت به متغیر زمان به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\partial_t u(x,t)=v(x,t),\\ \partial_t v(x,t)=-\alpha\nabla^2 u-N(u)+f(\boldsymbol{x},t)\end{cases} \tag{۱۳}$$

همراه شرایط مرزی دیریکله و شرایط اولیه زیر:

$$u(x,0)=u_0(x), \tag{۱۴}$$

$$v(x,0)=v_0(x). \tag{۱۵}$$

قرار می‌دهیم

$$\begin{cases}F_1(t,U,V)=V(X,t),\\ F_2(t,U,V)=-\alpha L_\nabla.U(X,t)\\ \qquad -N(U(\boldsymbol{X},t))+f(\boldsymbol{X},t),\end{cases}$$

که در آن

$$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\dots,x_N]^T,$$

$$U(\boldsymbol{X},t)=[u(x_1,t),u(x_2,t),\dots,u(x_N,t)]^T$$

$$
\begin{aligned}
&V\left(\boldsymbol{X},t\right)\\
&=\left[v\left(x_{۱},t\right),v\left(x_{۲},t\right),\ldots,v\left(x_{N},t\right)\right]^{T},\\
&\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{X},t\right)\\
&=\left[f\left(x_{۱},t\right),f\left(x_{۲},t\right),\ldots,f\left(x_{N},t\right)\right]^{T}
\end{aligned}
$$

و L_{∇} ماتریس عملیاتی مربوط به عملگر خطی ∇^2 است. بنابراین مسئله را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dU}{dt}=F_{۱}\left(t,U,V\right),\\
\dfrac{dV}{dt}=F_{۲}\left(t,U,V\right),
\end{cases}
\qquad (۱۶)
$$

همراه با شرایط اولیه زیر:

$$
\begin{cases}
U\left(\boldsymbol{X},۰\right)=u_{۰}\left(X\right),\\
V\left(\boldsymbol{X},۰\right)=v_{۰}\left(X\right).
\end{cases}
\qquad (۱۷)
$$

حال با استفاده از روش گسسته‌سازی زمانی صریح رانگ کوتای مرتبه چهار و ماتریس‌های عملیاتی هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت مسئله (۱۶)- (۱۷) را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$
\begin{cases}
U_{N}^{m+۱}=U_{N}^{m}\\
\quad+\frac{۱}{۶}\left(k_{۱,۱}+۲k_{۲,۱}+۲k_{۳,۱}+k_{۴,۱}\right),\\
V_{N}^{m+۱}=V_{N}^{m}\\
\quad+\frac{۱}{۶}\left(k_{۱,۲}+۲k_{۲,۲}+۲k_{۳,۲}+k_{۴,۲}\right),
\end{cases}
\qquad (۱۸)
$$

که در آن برای $i=۱,۲$ داریم:

$$k_{۱,i}=d_{t}F_{i}\left(t_{m},U_{N}^{m},V_{N}^{m}\right),$$

$$k_{۲,i}=d_{t}F_{i}\left(t_{m}+\frac{dt}{۲},U_{N}^{m}+\frac{۱}{۲}k_{۱,۱},V_{N}^{m}+\frac{۱}{۲}k_{۱,۲}\right),$$

$$k_{۳,i}=d_{t}F_{i}\left(t_{m}+\frac{dt}{۲},U_{N}^{m}+\frac{۱}{۲}k_{۲,۱},V_{N}^{m}+\frac{۱}{۲}k_{۲,۲}\right),$$

$$k_{۴,i}=d_{t}F_{i}\left(t_{m}+dt,U_{N}^{m}+k_{۳,۱},V_{N}^{m}+k_{۳,۲}\right).$$

۳ نتایج عددی

در این بخش به منظور نشان دادن کارایی و توانایی روش در حل مسائل غیرخطی وابسته به زمان از جمله مسئله غیرخطی کلین-گوردن به ارائه نتایج به‌دست آمده برای چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱. مسئله غیرخطی کلین-گوردن زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}}=\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}-u^{۲}+۶xt+۲x,\\
&۰\leq x\leq ۱,t_{۰}<t<T,
\end{aligned}
\qquad (۱۹)
$$

با شرایط اولیه

$$u\left(x,t_{۰}\right)=x^{۳}t_{۰}^{۳},\qquad u_{t}\left(x,t_{۰}\right)=۳x^{۳}t_{۰}^{۳},\quad (۲۰)$$

و شرایط مرزی

$$u\left(۰,t\right)=۰,\quad u\left(۱,t\right)=t^{۳},\qquad (۲۱)$$

جواب دقیق مسئله فوق به‌صورت زیر است:

$$u\left(x,t\right)=x^{۳}t^{۳},\quad t_{۰}\leq t<T.\qquad (۲۲)$$

در این مثال قرار می‌دهیم $T=۱,۲,۳,۴,۵,t_{۰}=d_{t},d_{t}=\frac{۱}{۱۰۰۰}$ و $N=۵۰$ و با استفاده از روش شبه‌طیفی مبتنی به هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت به حل مسئله می‌پردازیم. در جدول ۱ ماکزیمم خطای مطلق نتایج به‌دست آمده با بهترین نتایج گزارش شده در [۱۲، ۱۳] مقایسه شده است که نشان‌دهنده قدرت و توانایی روش معرفی شده در حل مسائل غیرخطی وابسته به زمان است.

مثال ۲. مسئله غیرخطی کلین-گوردن زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}}=\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}-u-u^{۳}+f\left(x,t\right),\\
&-۱\leq x\leq ۱,۰<t<T,
\end{aligned}
\qquad (۲۳)
$$

t	مرجع [۱۲]	مرجع [۱۳]	W_2^3 روش معرفی شده	W_2^5 روش معرفی شده
۱	۱.۱۰۱۲E −۵	۳.۳۷E −۹	۳.۱۲۱۱۶E −۶	۱.۵۰۴۷۹E −۱۱
۲	۱.۶۴۹۶E −۴	۱.۶۱E −۸	۲.۴۹۲۲۷E −۵	۱.۲۳۵۶۲E −۱۰
۳	۵.۹۷۲۸E −۴	۱.۱۲E −۷	۸.۴۶۰۴۶E −۵	۴.۱۶۲۶۴E −۱۰
۴	۱.۸۲۶۴E −۳	۳.۲۲E −۷	۲.۰۰۳۹۵E −۴	۹.۸۲۹۱۸E −۱۰
۵	۳.۶۹۱۵E −۳	۶.۹۵E −۷	۳.۹۰۱۳۲E −۴	۱.۹۱۰۸۳E −۱۰

جدول ۱. مقایسه ماکزیمم خطای مطلق با استفاده از $N=50$ و $d_t=\frac{1}{1000}$.

که در آن

$$f(x,t)=(x^2-2)\cosh(x+t)-4x\sinh(x+t)+x^6\cosh^3(x+t),$$

با شرایط اولیه

$$u(x,0)=x^2\cosh x,\quad u_t(x,0)=x^2\sinh x, \tag{۲۴}$$

و شرایط مرزی

$$u(-1,t)=\cosh(-1+t),\quad u(1,t)=\cosh(1+t). \tag{۲۵}$$

جواب دقیق مسئله فوق به‌صورت زیر است:

$$u(x,t)=x^2\cosh(x+t),\quad 0\le t<T. \tag{۲۶}$$

در این مثال قرار می‌دهیم $T=1,2,3,4,5,t_0=dt,dt=\frac{1}{100}$ و $N=100$ و با استفاده از روش شبه‌طیفی مبتنی به هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت به حل مسئله می‌پردازیم. در جدول ۲ ماکزیمم خطای مطلق نتایج به‌دست آمده با بهترین نتایج گزارش شده در [۱۲ و ۱۴] مقایسه شده است که نشان‌دهنده قدرت و توانایی روش معرفی شده در حل مسائل غیرخطی وابسته به زمان است.

مرجع [۱۲]	مرجع [۱۴]	W_2^3 روش معرفی شده	روش معرفی شده W_2^5
۵.۰۷۰۵ E −۵	۹.۴۵۲۶ E −۵	۲.۴۶۵۷۸ E −۵	۱.۶۶۸۲۱ E −۸
۵.۰۲۶۰ E −۴	۹.۷۹۳۳ E −۴	۶.۳۲۸۹۵ E −۵	۵.۶۹۷۹۶ E −۸
۲.۰۶۱۲ E −۳	۳.۹۷۴۰ E −۳	۹.۱۵۰۷۳ E −۵	۷.۷۰۶۲۷ E −۷
۶.۵۷۲۰ E −۳	۱.۲۹۶۰ E −۲	۸.۷۸۷۱۱ E −۵	۱.۴۴۹۹ E −۵
۱.۹۰۶۷ E −۲	۳.۷۲۲۴ E −۲	۲.۹۵۶۵۵ E −۴	۳.۰۱۶۱۹ E −۴

جدول ۲. مقایسه ماکزیمم خطای مطلق با استفاده از $N=100$ و $d_t=\frac{1}{100}$.

با توجه به نتایج ارائه شده در جدول‌های ۱ و ۲ به سادگی می‌توان مشاهده کرد که با استفاده از هسته‌های بازتولیدی با درجه همواری بیشتر نتایج دقیق‌تری به‌دست می‌آیند که نتایج تحلیلی به‌دست آمده در مرجع [۱۵] را تأیید می‌کند.

۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش شبه‌طیفی مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل مسئله غیرخطی کلین–گوردن معرفی شده است. در این روش ماتریس‌های عملیاتی را با استفاده از هسته‌های بازتولیدی یک فضای هیلبرت به‌دست می‌آوریم، به‌طوری‌که هسته‌های بازتولیدی به‌طور دقیق در شرایط مرزی مسئله صدق می‌کنند. به‌منظور گسسته‌سازی بُعد زمانی مسئله از روش رانگ کوتای مرتبه چهار استفاده کرده‌ایم. استفاده از ماتریس‌های عملیاتی به‌دست آمده با استفاده ازهسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت همچنین اعمال دقیق شرایط مرزی بر روی پایه‌ها از مزایای روش معرفی شده هستند. در پایان چند مثال برای نشان دادن کارایی و توانایی روش برای حل مسائل غیرخطی وابسته به زمان ارائه شده است. نتایج به‌دست آمده و مقایسه آنها با نتایج گزارش شده در مقالات بر توانایی، دقت و کارایی روش معرفی شده تأکید دارند.

سپاسگزاری

بدین‌وسیله نگارندگان مقاله از حمایت مالی صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور و دانشگاه شهید بهشتی در انجام این تحقیق تشکر و قدردانی می‌نمایند.

References

[1] L. Debnath, Nonlinear Klein-Gordon and Sine-Gordon Equations, Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhäuser Boston, 2012: 579-622.

[2] P.G. Drazin, R.S. Johnson, Solitons: an introduction. Vol. 2. Cambridge university press, 1989.

[3] R. Schaback, Convergence of unsymmetric kernel-based meshless collocation methods, SIAM J. Numer. Anal., 45 (2007) 333-351.

[4] S. Abbasbandy, B. Azarnavid, M.S. Alhuthali, A shooting reproducing kernel Hilbert space method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems, J. Comput. Appl. Math., 279 (2015) 293-305.

[5] I. Cialenco, G.E. Fasshauer, Q. Ye, Approximation of stochastic partial differential equations by a kernel-based collocation method, Int. J. Comput. Math., 89 (2012) 2543-2561.

[6] H. Du, M.G. Cui, Approximate solution of the Fredholm integral equation of the first kind in a reproducing kernel Hilbert space, Appl. Math. Lett., 21 (2008) 617-623.

[7] G.E. Fasshauer, F.J. Hickernell, Q. Ye, Solving support vector machines in reproducing kernel Banach spaces with positive definite functions, Appl. Comput. Harmonic Anal., 38 (2015) 115-139.

[8] M.G. Cui, Y. Lin, Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space. Nova Science, New York, USA, 2009.

[9] F. Geng, M.G. Cui, B. Zhang, Method for solving nonlinear initial value problems by combining homotopy perturbation and reproducing kernel Hilbert space methods, Nonlinear Anal.: Real World Appl., 11 (2010) 637-644.

[10] F. Geng, M.G. Cui, Solving a nonlinear system of second order boundary value problems, J. Math. Anal. Appl., 327 (2007) 1167-1181.

[11] B. Azarnavid, F. Parvaneh, S. Abbasbandy, Picard-reproducing kernel Hilbert space method for solving generalized singular nonlinear Lane-Emden type equations, Math. Model. Anal., 20 (2015) 754-767.

[12] M. Dehghan, A. Shokri, Numerical solution of the nonlinear Klein-Gordon equation using radial basis functions, J. Comput. Appl. Math., 230 (2009) 400-410.

[13] C.W. Chang, C.S. Liu, An implicit Lie-group iterative scheme for solving the nonlinear Klein–Gordon and sine-Gordon equations, Appl. Math. Model., 40 (2016) 1157-1167.

[14] F. Yin, T. Tian, J. Song, M. Zhu, Spectral methods using Legendre wavelets for nonlinear Klein\ Sine-Gordon equations, J. Comput. Appl. Math., 275 (2015) 321-334.

[15] S. Abbasbandy, B. Azarnavid, Some error estimates for the reproducing kernel Hilbert spaces method, J. Compu. Appl. Math., 296 (2016) 789-797.