سیستم‌های مختلط و غیرخطی
سال ۱، دوره ۱، شماره ۱، پاییز ۱۳۹۶، صص ۶۳ تا ۷۰

Complex and Nonlinear Systems
Vol. 1, No. 1, Autumn 2017, pp. 63-70

بررسی موضعی تقارن در خمینه‌های ریمانی دو بُعدی

اسماعیل پیغان[۱،*]، عیسی شراهی[۲]

۱. دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه اراک
۲. دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه اراک

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۵/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۶/۲۶

On locally symmetry on 2-dimensional Riemannian manifolds

Esmaeil Peyghan[1,*], Esa Sharahi[2]

1. Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Arak University
2. PhD Candidate, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Arak University

Received: 8/3/2017 Accepted: 9/17/2017

چکیده: در این مقاله، شرایطی لازم و کافی برای بررسی وضعیت تقارن موضعی روی یک خمینه ریمانی دلخواه دوبُعدی به‌دست خواهیم آورد. این شرایط، خالی از جوانب گروه‌های لی بوده و بنابراین می‌تواند بدون درگیری با مفاهیم گروه‌های لی، در محاسبات دوبُعدی رویه‌ها به کار گرفته شود و نگرش‌های شهودی را بهبود بخشد. همچنین، به بررسی و ایجاد شرایطی معادل برای وضعیتی که یک خمینه دوبُعدی با دو متریک همدیس ریمانی، موضعاً متقارن باشد، می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: تانسور انحنا، تقارن موضعی، خمینه ریمانی، متریک های همدیس ریمانی، معادلات مشتق‌های پاره‌ای.

Abstract: In this paper, we are going to derive some necessary and efficient conditions for a 2-dimensional Riemannian curve to be locally symmetric. These conditions are free of Lie group discussions and thus could be apply for 2-dimensional computations on surfaces without dealing with Lie groups concepts and improve intuitive observations. Also, we deal with equivalent conditions under which a 2-dimensional Riemannian curve with two conformal Riemannian metrics is locally symmetric.

Keywords: Curvature tensor, locally symmetry, Riemannian manifold, partial differential equations

۱ مقدمه

یکی از سؤالاتی که هنگام مطالعه هندسه ریمانی ممکن است به ذهن شخص برسد، این است که اگر مشتق کواریان[۱] تانسور انحنا متحد با صفر باشد، یعنی $\nabla R = ۰$، چه روی می‌دهد؟ بدیهی‌ست مثلاً در خمینه‌هایی که تانسور انحنای آن‌ها ثابت باشد، این اتفاق خواهد افتاد. بنابراین، حداقل در وجود چنین فضاهایی شکی نیست. الی کارتان[۲] ثابت کرد که این تساوی در یک خمینه ریمانی، یکی از شرایط معادل برای مفهومی به نام «تقارن موضعی» است. در هندسه دیفرانسیل، فضاهایی را که تقارن ژئودزیکی[۳] حول هر

[1] Covariant Derivative
[2] Elie Cartan
[3] Geodesic

* نویسنده مسئول
Corresponding author: epeyghan@gmail.com

نقطه در آنها یک ایزومتری[1] موضعی است، فضاهای موضعاً متقارن می‌نامند. منظور از این تقارن ژئودزیکی در اطراف نقطه‌ای مانند p نگاشتی است که هر ژئودزیک $\gamma(t)$ گذرنده از $p=\gamma(۰)$ را به ژئودزیک $\gamma(-t)$ تبدیل کند. اگر خمینه کامل باشد، آنگاه به لطف قضیه مشهور هوف-رینو[2] می‌توان برای هر نقطه، یک تقارن ژئودزیکی سرتاسری تعریف کرده و اگر تمام این تقارن‌ها ایزومتری باشند، آنگاه خمینه را «متقارن» لقب دهیم.

در فضاهای ریمانی، صفر شدن مربع یک تانسور صفر بودن خود آن تانسور را نتیجه خواهد داد. بنابراین، $\nabla\nabla...\nabla R=۰$ به‌طور دقیق معادل $\nabla R=۰$ است. پیامد نکته اخیر، پایستگی شرط تقارن نسبت به تعمیم بوده و نشان می‌دهد که تقارن در فضاهای ریمانی یک مفهوم تفکیک‌ناپذیر است. چنین اهمیت ویژه‌ای از تقارن، نگاه ریاضیدانان بسیاری را به خود جلب کرده است که الی کارتان سرآمد آنهاست. مطالعات کامل و پربار کارتان درباره تقارن بر هیچ کس پوشیده نیست. کارتان بسیار مایل بود تا نگرش خود را بر خمینه‌های موضعاً متقارن از دریچه گروه‌های لی پیش ببرد. وی چنین فضاهایی را توسط خارج قسمت‌های گروه‌های شبه‌ساده طبقه‌بندی کرد. در حقیقت، فضاهای متقارن به سه دسته تخت، فشرده و غیرفشرده تقسیم‌بندی می‌شوند. فضای اقلیدسی، کره در فضای اقلیدسی و فضای هذلولوی حقیقی، به ترتیب مثال‌هایی از این دسته‌ها بوده که دارای انحناهای صفر، ۱+ و ۱- هستند.

دسته سوم این تقسیم‌بندی به‌ویژه در هندسه جبری از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

یک توضیح تاریخی پیرامون پنداره‌های معادلی از تقارن و تقسیم‌بندی کارتان از این فضاها در [۱] یافتنی‌ست. همچنین در همان‌جا می‌توان قانع شد که کارتان چگونه به این نتیجه رسید که باید به‌سختی به دنبال فضاهای متقارن گشت.

بررسی‌ها در فضاهای متقارن همچنان ادامه دارند. این فضاها به علت خاصیت تقارن بسیار مورد توجه فیزیک‌دانان و دانشمندان سایر علوم قرار گرفته‌اند. علاوه بر جنبه‌های خالص هندسی، ردپای فضاهای متقارن را می‌توان در کوانتوم، پردازش تصویر و مکانیک نیز یافت [۲, ۳].

ما در این جستار، توجه خود را به حالت خمینه‌های ریمانی دو بُعدی معطوف خواهیم‌کرد و شرایط معادلی را برای بررسی سریع اینکه یک رویه متقارن است و یا نه، به‌دست خواهیم‌آورد. در بخش بعدی، به مروری سریع بر مفاهیم لازم پرداخته‌ایم. در بخش ۳ شرایطی لازم و کافی برای تقارن موضعی در دو بُعد، به همراه مثال‌هایی ارائه کرده‌ایم. در نهایت، بخش ۴ نیز به ارتباط بین یک فضای دو بُعدی موضعاً متقارن مجهز به دو متریک همدیس[3] ریمانی اختصاص یافته است.

۲ مفاهیم مقدماتی

فرض کنید فضای برداری n-بعدی V مجهز به فرم دوخطی متقارن ناتبهگنی باشد. گویند V از نشان

[1] Isometric
[2] Hopf-Rinow
[3] Conformal

$(k,n-k)$ است، هرگاه در بیان آن فرم بر حسب مجموعی از مربعات، k مربع منفی و $n-k$ مربع مثبت وجود داشته باشد. یک تانسور متریک g روی خمینه دیفرانسیل‌پذیری مانند M، میدان تانسوری (۰,۲) ناتبهگن متقارنی است که دارای نشانی ثابت است. از دیدگاه سرتاسری، اگر فضای مماس بر خمینه M را به‌صورت $TM = U_{p \in M} T_p M$ در نظر بگیریم، در بررسی‌های متداول، یک متریک ریمانی روی M عبارت است از برشی از $T^*M \otimes T^*M$ که در هر نقطه متقارن و مثبت‌معین است.

در هندسه ریمانی نشان داده می‌شود که برای هر خمینه ریمانی (M,g) تنها یک التصاق[1] ∇ وجود دارد، به‌طوری‌که شرایط زیر را هم‌زمان برآورده کند:

$$i)\ \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y],$$
$$ii)\ Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

شرط اول، خاصیت «تاب–آزاد[2]»ی نام داشته و یکتایی التصاق مزبور از آن ناشی می‌شود. همچنین شرط دوم را برای اثبات وجود این التصاق استفاده می‌کنند. در عمل، این تنها التصاق متریک تاب آزاد ∇ مشهور به التصاق لوی–چویتا[3] را روی یک خمینه ریمانی (M,g) با حل دستگاه زیر به‌دست می‌آورند:

$$\begin{aligned}۲g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) \\ &- Zg(X,Y) + g([X,Y],Z) \\ &- g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y).\end{aligned}$$

دستگاه اخیر نیز به فرمول کازول[4] مشهور است.

[1] Connection
[2] Torsion-Free
[3] Levi-Civita
[4] Koszol

طبق معمول، پایه‌های موضعی $\frac{\partial}{\partial x^a}$ را با ∂_a مختصر کرده و بنابراین مؤلفه‌های ماتریس

$$g = g_{ab} dx^a \otimes dx^b$$

را به‌صورت $g_{ab} = g(\partial_a, \partial_b)$ و همچنین مؤلفه‌های التصاق لوی–چویتا را با Γ^c_{ab} که $\nabla \partial_a \partial_b = \Gamma^c_{ab} \partial_c$ نشان می‌دهیم. اگر R بر میدان تانسوری انحنای التصاق اخیر دلالت کند، آنگاه تعریف‌های

$$\begin{aligned}R(X_p, Y_p)Z_p &= \nabla X_p \nabla_Y Z \\ &- \nabla Y_p \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]_p} Z,\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}&R(X_p, Y_p, Z_p, W_p) \\ &= g(R(Z_p, W_p)Y_p, X_p)\end{aligned}$$

که در هردوی آنها X, Y, Z و W میدان‌های برداری روی M بوده و p نقطه‌ای دلخواه درون آن است، به‌صورت موضعی انجام می‌شوند.

رابطه

$$\begin{aligned}R^a_{bcd} &= \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} \\ &+ \partial_c \Gamma^a_{ck} \partial_c \Gamma^k_{bd} - \partial_c \Gamma^a_{dk} \partial_c \Gamma^k_{bc},\end{aligned}$$

بیان موضعی تانسور انحنای ریمان است. معمولاً برای محاسبات سریع‌تر و استفاده از اتحادهای معروف در این راستا، ادغام $R_{abcd} = g_{ae} R^e_{bcd}$ به کار بسته می‌شود که در آن R_{abcd} نماد مختصری برای $R(\partial_a, \partial_b, \partial_c, \partial_d)$ است. می‌توان ملاحظه کرد که R_{abcd} نسبت به جابجایی زوج‌اندیس‌های اول و دوم متقارن و نسبت به جابجایی اندیس‌های اول و دوم و همچنین سوم و چهارم پادمتقارن است.

یک تقارن ژئودزیکی حول نقطه p در M نگاشتی همچون $S_p : U \longrightarrow M$ است که p را

ثابت نگه داشته و مسیر تمام ژئودزیک‌های گذرنده از p را وارون می‌کند. با تحدید برد S_p به خود U خواهیم داشت $S^{۲} = Id_M$. همچنین برای سادگی کار، متداول است که U را همسایگی نرمال در نظر می‌گیرند (این همسایگی‌های نرمال در خمینه‌های ریمانی همواره حداقل به‌صورت موضعی وجود دارند). در مختصات نرمالی مانند $(x^i)_{۱}^{n}$ در اطراف p، می‌توان S_p را به‌صورت

$$(x^{۱},\dots,x^{n}) \longrightarrow (-x^{۱},\dots,-x^{n})$$

بیان کرد. در این حالت، S_p یک وابرریختی[1] از U به U بوده و به‌علاوه، $d(S_p)_p = -Id_{TM}$.

اگر برای هر نقطه در M یک تقارن ژئودزیکی ایزومتری موجود باشد، آنگاه (M,g) را یک خمینه ریمانی موضعاً متقارن نامند. به‌علاوه، اگر دامنه تمام تقارن‌های ژئودزیکی یافت شده M باشد، آنگاه (M,g) را (به‌صورت سرتاسری) متقارن نامند.

قضیه زیر که در هندسه ریمانی بسیار مشهور است، امکان بررسی تقارن موضعی توسط مشتق‌گیری از ضرایب تانسور انحنا را به‌دست می‌دهد.

قضیه ۱. [۴] خمینه M مجهز به متریک ریمانی g و التصاق متریک ∇ را در نظر بگیرید. با این شرایط، M موضعاً متقارن است اگر و تنها اگر ∇ تاب–آزاد بوده و همچنین برای هر میدان برداری X روی M اتحاد $\nabla_X R = ۰$ برقرار باشد.

۳ بررسی‌های تقارن در دو بُعد

مطالب این بخش بر محور ارائه شرایط لازم و کافی برای آزمودن یک رویه دو بُعدی ریمانی از دیدگاه تقارن موضعی نگاشته شده‌اند. توضیح این نکته ضروری است که برای پرهیز از خستگی خواننده و همچنین کوتاه‌تر شدن نوشتار، جزئیات محاسبه‌ها در این جستار نیامده‌اند.

در گزاره زیر، روابط بین مؤلفه‌های تانسور انحنا بر حسب ضرایب کریستفل[2] التصاق لوی–چویتا بیان شده‌اند. در یافتن قضیه‌های اصلی این بخش، روابط موجود در گزاره زیر مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

گزاره ۱. مؤلفه‌های غیرصفر یک خمینه ریمانی دو بُعدی به‌صورت زیر هستند:

$$R^{۱}_{۱۱۲} = -R^{۱}_{۱۲۱}, \quad R^{۱}_{۲۲۱} = -R^{۱}_{۲۱۲},$$
$$R^{۲}_{۱۱۲} = -R^{۲}_{۱۲۱}, \quad R^{۲}_{۲۲۱} = -R^{۲}_{۲۱۲}$$

که

$$\begin{cases} R^{۱}_{۱۱۲} = \partial_x \Gamma^{۱}_{۱۲} - \partial_y \Gamma^{۱}_{۱۱} + \Gamma^{۱}_{۱۲}\Gamma^{۲}_{۱۲} - \Gamma^{۱}_{۲۲}\Gamma^{۲}_{۱۱} \\ R^{۲}_{۲۲۱} = \partial_y \Gamma^{۲}_{۱۲} - \partial_x \Gamma^{۲}_{۲۲} + \Gamma^{۱}_{۱۲}\Gamma^{۲}_{۱۲} - \Gamma^{۱}_{۲۲}\Gamma^{۲}_{۱۱} \\ R^{۱}_{۲۲۱} = \partial_y \Gamma^{۱}_{۱۲} - \partial_x \Gamma^{۱}_{۲۲} + (\Gamma^{۱}_{۱۲}\Gamma^{۱}_{۱۲} + \Gamma^{۱}_{۲۲}\Gamma^{۲}_{۱۲}) \\ \qquad - (\Gamma^{۱}_{۱۱}\Gamma^{۱}_{۲۲} + \Gamma^{۱}_{۱۲}\Gamma^{۲}_{۲۲}) \\ R^{۲}_{۱۱۲} = \partial_x \Gamma^{۲}_{۱۲} - \partial_y \Gamma^{۲}_{۱۱} + (\Gamma^{۲}_{۱۱}\Gamma^{۱}_{۱۲} + \Gamma^{۲}_{۱۲}\Gamma^{۲}_{۱۲}) \\ \qquad - (\Gamma^{۲}_{۱۲}\Gamma^{۱}_{۱۱} + \Gamma^{۲}_{۱۱}\Gamma^{۲}_{۲۲}) \end{cases}$$

برهان. محاسباتی سرراست با استفاده از بیان موضعی انحنا و خواص جابجایی آن نسبت به اندیس‌ها، احکام فوق را نتیجه خواهد داد. □

وقتی رویه ریمانی دو بعدی باشد، تنها مؤلفه $R_{۱۲۱۲}$ برای شناسایی تمام مؤلفه های انحنا کافی ست. بنابراین، نگرش ما به سمت یافتن بیانی از شرط تقارن

---

[1] Diffeomorphism

[2] Christoffel Coefficients

موضعی که حاوی مؤلفه‌های انحنا به‌صورت R_{ebcd} باشند جلب می‌شود. در گزاره زیر، شرط تقارن موضعی برای یک خمینه ریمانی دلخواه $n-$بعدی در قالب دستگاهی از معادله‌های با مشتق‌های پاره‌ای براساس مؤلفه های چهارتایی انحنا بیان می‌شود.

گزاره ۲. شرط $\nabla R=0$ به معنای

$$\begin{aligned}0&=\nabla_T R=T\,(R\,(X\,,Y\,,Z\,,W\,))\\&-R\,(\nabla_T X\,,Y\,,Z\,,W\,)-R\,(X\,,\nabla_T Y\,,Z\,,W\,)\\&-R\,(X\,,Y\,,\nabla_T Z\,,W\,)-R\,(X\,,Y\,,Z\,,\nabla_T W\,),\end{aligned}$$

است که در آن همه $T\,,X\,,Y\,,Z\,,W$ میدان‌های برداری دلخواه روی M هستند.

برهان. ویژگی تانسورها اجازه می دهد تا به جای این میدان‌های برداری، پایه‌ها را قرار داده و سپس با میزانی از محاسبه‌های سرراست، بیان موضعی مذکور در گزاره را به‌دست می‌آوریم. □

اکنون، به فضای رویه‌های ریمانی دو بُعدی باز می‌گردیم. در این وضعیت، با برخی محاسبه‌های تکنیکی شخص می‌تواند بررسی کند که گزاره ۲ تماماً به قضیه زیر منتهی می‌شود.

قضیه ۲. یک خمینه ریمانی دو بُعدی موضعاً متقارن است اگر و تنها اگر

$$\partial_a(R_{1212})-2(\Gamma^1_{a1}+\Gamma^2_{a2})R_{1212}=0.\quad a=1,2 \quad (1)$$

برهان. کافی است گزاره ۲ را در دو بُعد به کار بریم. در این صورت، چون تمام مؤلفه‌های انحنا یا صفر بوده و یا حداکثر در علامت با مؤلفه R_{1212} متفاوت‌اند، تنها دو معادله (۱) باقی خواهند ماند. □

رابطه (۱) دستگاهی از دو معادله PDE است. مشاهده می‌کنید که وقتی $R_{1212}=0$، آنگاه به سرعت نتیجه می‌شود که خیمه موضعاً متقارن است.

قضیه ۲ یک تأیید دیگر بر این مدعا است که یافتن متریک ریمانی مناسبی که خمینه مفروضی با آن متریک، موضعاً متقارن شود، کاری دشوار و البته در بسیاری موارد، نشدنی است. در حقیقت، کافی است به دستگاه (۱) از این دیدگاه بنگرید که قرار است ضرایب کریستُفلی را بیابیم که در آن صدق کنند (خود R_{1212} نیز بر مبنای همان بیان می‌شود). می‌دانیم که در حالت کلی، یافتن متریک ریمانی تنها بر مبنای انحنا به‌صورت منحصربه‌فرد غیرممکن است.

اکنون فرض کنید معادلات (۱) برقرارند. با کمی تلاش می‌توان نشان داد که قضیه زیر درست است.

قضیه ۳. اگر یک خمینه ریمانی دو بُعدی موضعاً متقارن باشد، آنگاه بایستی شرایط زیر هم‌زمان برقرار باشند:

۱. $\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int(\Gamma_{12}^{1}+\Gamma_{12}^{2})dy-(\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{12}^{1})$ مستقل از y باشد،

۲. $\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int(\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{12}^{1})dx-(\Gamma_{12}^{1}+\Gamma_{12}^{2})$ مستقل از x باشد.

برهان. به همین بسنده می‌کنیم که با فرض برقراری (۱) حل معادله‌های آن احکام مزبور منتج می‌شود. □

قضیه ۳، شرایط لازمی را برای تحقیق اینکه یک خمینه ریمانی دو بُعدی موضعاً متقارن است یا نه، در اختیار می‌گذارد. توجه به این نکته بسیار مهم است که شرایط این قضیه، کافی نیستند. در مثال زیر، درستی ادعای اخیر بررسی شده است.

مثال ۱. متریک ریمانی زیر را در نظر بگیرید:

$$gij = \begin{pmatrix} (xy)^{2} & 0 \\ 0 & y^{2} \end{pmatrix}.$$

با محاسبه خواهیم داشت

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{x}, \quad \Gamma_{12}^{1} = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{22}^{1} = 0$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{x^{2}}{y}, \quad \Gamma_{12}^{2} = 0, \quad \Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{y}.$$

بنابراین $R_{1212} = 2x^{2}$. معادله‌های قضیه ۳ دارای جواب‌های $-\frac{1}{x}$ و $-\frac{2}{y}$ هستند که به‌ترتیب عاری از متغیرهای y و x هستند. اما

$$\frac{\partial}{\partial y} R_{1212} - 2(\Gamma_{21}^{1} + \Gamma_{22}^{2}) R_{1212} = -8\frac{x^{2}}{y} \quad (2)$$

که باعث می‌شود قضیه ۲ فرو بریزد. پس، علیرغم اینکه این متریک شرایط قضیهٔ ۳ را برآورد می‌کند، ولی معادله‌های رابطه (۱) برای آن برقرار نیست.

در ادامه، دو مثال برای راستی‌آزمایی قضیه‌های ۲ و ۳ آورده‌ایم.

مثال ۲. متریک

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2y^{2}} \end{pmatrix}$$

دارای انحنای اسکالر ثابت منفی بوده ($S = -4$) و بنابراین طبق قضایای معروف هندسه ریمانی، موضعاً متقارن است. با محاسبه معلوم می‌شود که

$$\Gamma_{11}^{1} = 0, \quad \Gamma_{12}^{1} = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma_{22}^{1} = 0$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{2}{y}, \quad \Gamma_{12}^{2} = 0, \quad \Gamma_{22}^{2} = -\frac{1}{y}$$

و بنابراین $R_{1212} = \frac{2}{y^{2}}$، به‌علاوه،

$$\frac{\partial}{\partial x}\int (\Gamma_{12}^{1} + \Gamma_{22}^{2})dy - (\Gamma_{12}^{2} + \Gamma_{11}^{1}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int (\Gamma_{12}^{2} + \Gamma_{11}^{1})dx - (\Gamma_{12}^{1} + \Gamma_{22}^{2}) = \frac{3}{y};$$

هم‌چنین دستگاه (۱) نیز صفر است.

مثال ۳. کره‌ای دو بُعدی را که متریک ریمانی

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1+x^{2}+y^{2})^{2}} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1+x^{2}+y^{2})^{2}} \end{pmatrix}$$

روی آن القا شده است در نظر بگیرید که می‌دانیم به‌صورت سرتاسری (و بنابراین) موضعاً متقارن است (دارای انحنای اسکالر ۲ = S است). با محاسبه معلوم می‌شود که

$$\Gamma_{11}^{1} = -\frac{2x}{x^{2}+y^{2}+1},$$

$$\Gamma_{12}^{1} = -\frac{2y}{x^{2}+y^{2}+1},$$

$$\Gamma_{22}^{1} = -\frac{2x}{x^{2}+y^{2}+1},$$

$$\Gamma_{11}^{2} = -\frac{2y}{x^{2}+y^{2}+1},$$

$$\Gamma_{12}^{2} = -\frac{2x}{x^{2}+y^{2}+1},$$

$$\Gamma_{22}^{2} = -\frac{2y}{x^{2}+y^{2}+1}.$$

بنابراین $R_{1212} = \frac{16}{(1+x^{2}+y^{2})^{4}}$. با به‌کاربستن قضیه‌های ۲ و ۳ برای این کره مشاهده خواهیم‌کرد که (۱) برقرار بوده و همچنین

$$\frac{\partial}{\partial x}\int(\Gamma_{12}^{1}+\Gamma_{22}^{2})dy-(\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{11}^{1})=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\int(\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{11}^{1})dx-(\Gamma_{12}^{1}+\Gamma_{22}^{2})=0.$$

۴ بررسی‌های تقارن موضعی در حالت همدیسی متریک‌های ریمانی

در این بخش، فرض می‌کنیم خمینه دو بُعدی M به دو متریک ریمانی $\bar{g}, g$ مجهز شده است، به نحوی که (M, g) موضعاً متقارن بوده و $\bar{g}, g$ به‌صورت همدیس با هم مرتبط باشند؛ یعنی تابعی هموار هم چون ϕ روی M وجود داشته باشد که $\bar{g}=e^{2\phi}g$. همچنین تمام اشیای هندسی القا شده توسط g را با قرار دادن نشان – روی آنها مشخص می‌کنیم. از آنجا که $\bar{g}, g$ به‌صورت همدیس با یکدیگر مرتبط هستند، رابطه

$$\bar{R}_{ijkl}=e^{2\phi}(R_{ijkl}-\Delta_{ijkl}), \qquad (۳)$$

بین انحناهای آنها برقرار است که در آن

$$\Delta_{ijkl}:=[g\,\mathrm{O}(\nabla\partial\phi-\partial\phi\partial\phi+\frac{1}{2}\|\nabla\phi\|^{2}g)]i_{jkl},$$

و همچنین O عملگر ضرب کولکارنی–نومیزو بوده که به‌صورت

$$(h\mathrm{O}k)_{ijkl}=h_{ik}k_{jl}+h_{jl}k_{jk}-h_{il}k_{jk}-h_{jk}k_{il}$$

تعریف می‌شود (برای جزئیات بیشتر، [۵] را ببینید).

در قضیه زیر، از دستگاه مختصات به‌صورت همدیس تخت، استفاده کرده و متریک ریمانی را به‌صورت

$$g=g_{11}(dx^{2}+dy^{2})=e^{\lambda(x,y)}(dx^{2}+dy^{2})$$

در نظر می‌گیریم (می‌دانیم که برای رویه‌ها این دستگاه مختصات، همواره وجود دارد).

قضیه ۴. فرض کنید خمینه ریمانی دو بُعدی (M, g) موضعاً متقارن بوده و همچنین تابع هموار هم چون ϕ روی M موجود باشد به نحوی که $\bar{g}=e^{2\phi}g$. در این صورت $(M, \bar{g})$ موضعاً متقارن است اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned}
&-(g_{11})^{2}(e^{2\varphi}-1)\frac{\partial^{3}}{\partial x_{1}^{3}}g_{11}-(g_{11})^{2}(e^{2\varphi}-1)\frac{\partial^{3}}{\partial x_{2}^{2}\partial x_{1}}g_{11}+((4e^{2\varphi}-4)\frac{\partial}{\partial x_{1}}g_{11}\\
&+(\frac{\partial}{\partial x_{1}}e^{2\varphi})g_{11})g_{11}\frac{\partial^{2}}{\partial x_{1}^{2}}g_{11}+((2e^{2\varphi}-2)\frac{\partial}{\partial x_{1}}g_{11}+(\frac{\partial}{\partial x_{1}}e^{2\varphi})g_{11})g_{11}\frac{\partial^{2}}{\partial x_{2}^{2}}g_{11}\\
&+2g_{11}(\frac{\partial}{\partial x_{2}}g_{11})(e^{2\varphi}-1)\frac{\partial^{2}}{\partial x_{2}\partial x_{1}}g_{11}+(-3e^{2\varphi}+3)(\frac{\partial}{\partial x_{1}}g_{11})^{3}-g_{11}(\frac{\partial}{\partial x_{1}}g_{11})^{2}\frac{\partial}{\partial x_{1}}e^{2\varphi}\\
&+((-3e^{2\varphi}+3)(\frac{\partial^{3}}{\partial x_{2}}g_{11})^{2}+4\ldots_{1212}g_{11}e^{2\varphi})\frac{\partial}{\partial x_{1}}g_{11}+(2\ldots_{1212}(g_{11})^{2}-g_{11}(\frac{\partial}{\partial x_{2}}g_{11})^{2})\frac{\partial}{\partial x_{1}}e^{2\varphi}=0
\end{aligned}$$

و

$$-(g_{11})^{2}(e^{2\varphi}-1)\frac{\partial^{3}}{\partial x_{2}\partial x_{1}^{2}}g_{11}-(g_{11})^{2}(e^{2\varphi}-1)\frac{\partial^{3}}{\partial x_{2}^{3}}g_{11}+((2e^{2\varphi}-2)\frac{\partial}{\partial x_{2}}g_{11}$$
$$+(\frac{\partial}{\partial x_{2}}e^{2\varphi})g_{11})g_{11}\frac{\partial^{2}}{\partial x_{1}^{2}}g_{11}+((4e^{2\varphi}-4)\frac{\partial}{\partial x_{2}}g_{11}+(\frac{\partial}{\partial x_{2}}e^{2\varphi})g_{11})g_{11}\frac{\partial^{2}}{\partial x_{2}^{2}}g_{11}$$
$$+2g_{11}(\frac{\partial}{\partial x_{1}}g_{11})(e^{2\varphi}-1)\frac{\partial^{2}}{\partial x_{2}\partial x_{1}}g_{11}+(-3e^{2\varphi}+3)(\frac{\partial}{\partial x_{2}}g_{11})^{3}-g_{11}(\frac{\partial}{\partial x_{2}}g_{11})^{2}\frac{\partial}{\partial x_{2}}e^{2\varphi}$$
$$+((-3e^{2\varphi}+3)(\frac{\partial}{\partial x_{1}}g_{11})^{2}+4\ldots_{1212}g_{11}e^{2\varphi})\frac{\partial}{\partial x_{2}}g_{11}+(2\ldots_{1212}(g_{11})^{2}-g_{11}(\frac{\partial}{\partial x_{1}}g_{11})^{2})\frac{\partial}{\partial x_{2}}e^{2\varphi}=0$$

برهان. با به‌کارگیری رابطه (۱) برای $(M,\bar{g})$ شروع کرده و سپس رابطه (۳) را روی آن اعمال می‌کنیم. جزئیات محاسبات، سرراست هستند. □

سپاسگزاری

تقدیم به دکتر اسدالله رضوی به پاسِ آنچه از علم و اخلاق به ما آموختند.

References

[1] M. Berger, A panoramic view of Riemannian geometry, Springer Science & Business Media,, 2012.

[2] M. Bacák, R. Bergmann, G. Steidl, A. Weinmann, A second order nonsmooth variational model for restoring manifold-valued images, SIAM J. Scientific Comput., 38 (2016) A567-A597.

[3] A. Caulton, The role of symmetry in the interpretation of physical theories, Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 52 (2015) 153-162.

[4] S. Helgason, Differential geometry and symmetric spaces, Academic press, 1962.

[5] P. Petersen, Riemannian geometry, Springer, New York, 2006.