Complex and Nonlinear Systems
Vol. 1, No. 1, Autumn 2017, pp. 87-92

سیستم‌های مختلط و غیرخطی
سال ۱، دوره ۱، شماره ۱، پاییز ۱۳۹۶، صص ۸۷ تا ۹۲

ویژگی‌های تبعیت برای یک زیررده خاص از توابع تحلیلی

حسام محزون*

استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد فیروزکوه

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۰۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۷/۱۵

Subordination results for a subclass of analytic functions

Hesam Mahzoon*

Assistant Professor, Department of Mathematics, Isamic Azad University, Firoozkooh Branch

Received: 8/30/2017 Accepted: 10/7/2017

چکیده: فرض‌کنید A رده توابع تحلیلی و نرمال‌شده در قرص واحد $\mathbb{D}$ باشد. گوییم تابع f از A به رده $N_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$ تعلق دارد هرگاه در نامساوی زیر صدق کند:

$$\mathrm{Re}\left(۱+\frac{۱}{b}\left[\frac{D_\lambda^m f(z)}{D_\lambda^n f(z)}-۱\right]\right)>\beta\left|\frac{۱}{b}\left[\frac{D_\lambda^m f(z)}{D_\lambda^n f(z)}-۱\right]\right|+\alpha$$

که در آن

$$D_\lambda^n f(z)=z+\sum_{k=۲}^{\infty}\left[۱+(k-۱)\lambda\right]^n a_k z^k$$

عملگر اَل-اُبودی است $۰\le\alpha<۱$، $\lambda,\beta\ge ۰$، $b\in\mathbb{C}\setminus\{۰\}$، $m\in\mathbb{N}$، $n\in\mathbb{N}_۰$ و $z\in\mathbb{D}$. در این مقاله، یک زیررده از $N_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$ را معرفی و برخی ویژگی‌های تبعیتی آن را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: توابع تحلیلی، توابع تک‌ارز، عملگر اَل-اُبودی، عمگر سالاگین، ضرب هادمارد (ضرب پیچشی).

Abstract: Assume that A is the class of normalized and analytic functions in $\mathbb{D}$. The function f from A belongs to $N_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$, if

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{1}{b}\left[\frac{D_\lambda^m f(z)}{D_\lambda^n f(z)}-1\right]\right)>\beta\left|\frac{1}{b}\left[\frac{D_\lambda^m f(z)}{D_\lambda^n f(z)}-1\right]\right|+\alpha$$

where

$$D_\lambda^n f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\left[1+(k-1)\lambda\right]^n a_k z^k$$

is Al-oboudi operator and $0\le\alpha<1$, $\lambda,\beta\ge 0$, $b\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_0$ and $z\in\mathbb{D}$. We prove several subordination relationships involving the function class $N_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$.

Keywords: analytic functions, univalent functions, Al-oboudi operator, Salagean operator, Hadamard Product.

۱ مقدمه

فرض کنید A رده همهٔ توابع تحلیلی و نرمال‌شده در قرص واحد $\mathbb{D}$ باشد، یعنی توابع تحلیلی در قرص واحد که در شرایط $f(۰)=f'(۰)-۱=۰$ صدق می‌کنند. می‌توان نشان داد که این‌گونه توابع دارای شکل زیر هستند:

$$f(z)=z+\sum_{k=۲}^{\infty}a_k z^k \qquad (۱)$$

*Corresponding author: mahzoon_hesam@yahoo.com

*نویسنده مسئول

همچنین زیررده S از توابع A را شامل تمام توابع تک‌ارز[1] در نظر می‌گیریم. فرض کنید α یک عدد حقیقی باشد که $0 \le \alpha < 1$. رده توابع ستاره‌گون[2] از مرتبهٔ α را با $S^*(\alpha)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S^*(\alpha) := \left\{ f \in A : \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha, z \in \mathbb{D} \right\}.$$

$S^*(0) \equiv S^*$ را رده توابع ستاره‌گون در نظر می‌گیریم. از طرفی $K(\alpha)$ را رده همهٔ توابع محدب[3] از مرتبه α در نظر می‌گیریم. اعضای این رده از توابع، به‌صورت تحلیلی در نامساوی زیر صدق می‌کنند:

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha, z \in \mathbb{D}.$$

همچنین $K(0) \equiv \mathrm{K}$ را رده توابع محدب می‌نامیم.

تعریف ۱. (اَل‌-اُبودی، [۱]): فرض‌کنید $n \in \mathbb{N}$ و $\lambda \ge 0$. عملگر $D_\lambda^n : A \to A$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &D_\lambda^0 f(z) = f(z) \\ &D_\lambda^1 f(z) = (1-\lambda) f(z) + \lambda z f'(z) \\ &\vdots \\ &D_\lambda^n f(z) = D_\lambda\left(D_\lambda^{n-1} f(z)\right) \end{aligned}$$

متذکر می‌شویم که با جای‌گذاری $\lambda = 1$ در عملگر اَل‌-اُبودی، عملگر سالاگین[4] به‌دست می‌آید (منبع [۲] را ببینید). همچنین اگر f به‌شکل (۱) داده شده باشد، داریم:

$$D_\lambda^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left[1 + (k-1)\lambda\right]^n a_k z^k \quad (۲)$$

که در آن $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$. در ادامه تعریف زیر را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲. فرض کنید $0 \le \alpha < 1$، $\lambda, \beta \ge 0$، $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$، $m \in \mathbb{N}$، $n \in \mathbb{N}_0$ و $z \in \mathbb{D}$. گوییم تابع f به شکل (۱) به رده $N_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$ تعلق دارد هرگاه در نامساوی زیر صدق کند:

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{1}{b}\left[\frac{D_\lambda^m f(z)}{D_\lambda^n f(z)} - 1\right]\right) > \beta \left|\frac{1}{b}\left[\frac{D_\lambda^m f(z)}{D_\lambda^n f(z)} - 1\right]\right| + \alpha.$$

لازم به ذکر است که رده توابع $N_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$ تعمیمی از زیرردههایی است که قبلاً توسط پژوهشگران مختلف مطالعه شده‌اند [۲-۴]. به عنوان مثال، با انتخاب‌های مناسب m و n، این رده شامل توابع ستاره‌گون و محدب از مرتبهٔ α است.

قضیه ۱. (محزون و لاتا، [۵]): با توجه به مفروضات تعریف ۲، اگر تابع $f \in A$ در نامساوی

$$\sum_{k=2}^{\infty} \Psi\left(\lambda, m, n, \mathrm{k}, \alpha, \beta, b\right) |\alpha_k| \le 2(1-\alpha) \quad (۳)$$

صدق کند، آنگاه به رده $N_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$ تعلق دارد که در آن

---
[1] Univalent
[2] Starlike
[3] Convex
[4] Salagean

$$\Psi(\lambda,m,n,\mathrm{k},\alpha,\beta,b)|\alpha_k|$$
$$=\left|\left[1+(\mathrm{k}-1)\lambda\right]^m-(\mathrm{b}\,\alpha+1)\left[1+(\mathrm{k}-1)\lambda\right]^n\right|$$
$$+\left(\left[1+(\mathrm{k}-1)\lambda\right]^m+\left[b(2\alpha-1)-1\right]\left[1+(\mathrm{k}-1)\lambda\right]^n\right)$$
$$+2\beta\left|\left[1+(\mathrm{k}-1)\lambda\right]^m-\left[1+(\mathrm{k}-1)\lambda\right]^n\right|.$$

با استفاده از قضیه ۱، رده $\hat{N}_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$ را به عنوان زیررده‌ای از $N_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$ معرفی می‌کنیم که شامل تمام f هایی است که در نامساوی (۳) صدق می‌کنند. به عنوان مثالی از این رده، تابع تحلیلی و نرمال شده F را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$F(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2(1-\alpha)e^{i\theta}}{k(k-1)\Psi(\lambda,m,n,k,\alpha,\beta,b)}z^n$$

این تابع به رده $\hat{N}_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$ تعلق دارد، زیرا در نامساوی (۳) صدق می‌کند. داریم:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\Psi(\lambda,m,n,k,\alpha,\beta,b)|a_k|=2(1-\alpha)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}=2(1-\alpha)$$

در این مقاله، چندین ویژگی تبعیتی مرتبط با زیررده $\hat{N}_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$ را به‌دست می‌آوریم. تعریف‌های زیر در ادامه مطلب مفید هستند:

فرض کنید تابع f به شکل (۱) باشد. همچنین تابع g را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$g(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}b_k z^k. \qquad (۴)$$

در این صورت

$$(f*g)(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k b_k z^k$$

حاصل‌ضرب هادامارد[1] یا پیچشی دو تابع f و g نامیده می‌شود.

برای توابع مفروض f و g که در $\mathbb{D}$ تحلیلی‌اند گوییم تابع f از g تبعیت می‌کند و می‌نویسیم

$$f(z)\prec g(z), z\in\mathbb{D},$$

اگر یک تابع شوارتز مانند $w(z)$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$f(z)=g(w(z)), z\in\mathbb{D}.$$

لازم به ذکر است اگر تابع g در دیسک واحد تک‌ارز باشد، معادل زیر را برای زیرترتیب داریم:

$$f(z)\prec g(z)\Leftrightarrow(f(0)=g(0),f(\mathbb{D})\subset g(\mathbb{D}))$$

تعریف ۳. (دنباله عامل تبعیتی): یک دنباله، عامل تبعیتی نامیده می‌شود هرگاه f به شکل (۱) تعریف، در $\mathbb{D}$ تحلیلی، تک‌ارز و محدب باشد، و در رابطه تبعیت زیر صدق کند

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k b_k z^k\prec f(z),$$

که در آن $a_1=1$ و $z\in\mathbb{D}$. حال قضیه زیر را یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۲. (ویلف [۶]): دنباله $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله عامل تبعیتی است اگر و فقط اگر

$$\mathrm{Re}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^k\right)>0, z\in\mathbb{D}. \qquad (۵)$$

[1] Hadamard Product

۲ نتایج اصلی

اولین نتیجه اصلی به‌صورت زیر است.

قضیه ۳. فرض کنید f به شکل (۱) تعریف و از رده $\hat{N}_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$ باشد. همچنین فرض کنید که g تک‌ارز و محدب است. در این صورت

$$\Omega_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda).(f*g)(z)\prec g(z) \qquad (۶)$$

و

$$\mathrm{Re}(f(z)) > -\frac{۲(۱-\alpha)+\Psi(\lambda,m,n,۲,\alpha,\beta,b)}{\Psi(\lambda,m,n,۲,\alpha,\beta,b)} \qquad (۷)$$

که در آن

$$\beta\ge ۰,\lambda\ge ۰,m\in\mathbb{N},b\in\mathbb{C}\setminus\{۰\},۰\le\alpha<۱,z\in\mathbb{D}$$

و

$$\Omega_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda) := \frac{\Psi(\lambda,m,n,۲,\alpha,\beta,b)}{۲[۲(۱-\alpha)+\Psi(\lambda,m,n,۲,\alpha,\beta,b)]}. \qquad (۸)$$

عامل ثابت $\Omega_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$ در رابطه (۶) را نمی‌توان با یک مقدار بزرگتر از آن جایگزین کرد. این بدین معناست که نتیجه دقیق است.

برهان: گیریم $f\in\hat{N}_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$ و فرض کنید

$$g(z)=z+\sum_{k=۲}^{\infty}c_k z^k\in K$$

دراین صورت برای هر $f\in A$ داده شده به شکل (۱) داریم:

$$\Omega_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda).(f*g)(z) = \Omega_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda).\left(z+\sum_{k=۲}^{\infty}a_k c_k z^k\right) \qquad (۹)$$

که در آن $\Omega_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$ در (۸) تعریف شده است. از این رو رابطه تبعیت (۶) درست است هرگاه دنباله

$$\left\{\Omega_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)\cdot a_k\right\}_{k=۱}^{\infty}$$

یک دنباله عامل تبعیتی با شرط $a_۱=۱$ باشد و این با توجه به قضیه ۲، معادل نامساوی زیر است:

$$\mathrm{Re}\left(۱+\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\Psi(\lambda,m,n,۲,\alpha,\beta,b)}{۲(۱-\alpha)+\Psi(\lambda,m,n,۲,\alpha,\beta,b)}\alpha_\kappa z^k\right)>۰, \quad (z\in\mathbb{D}) \qquad (۱۰)$$

حال چون $\Psi(\lambda,m,n,k,\alpha,\beta,b)$ به ازای $k\in\mathbb{N}$ صعودی است، داریم

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left(۱+\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\Psi(\lambda,m,n,۲,\alpha,\beta,b)}{۲(۱-\alpha)+\Psi(\lambda,m,n,۲,\alpha,\beta,b)}\alpha_\kappa z^k\right)\\
&=\mathrm{Re}\left(۱+\frac{\Psi(\lambda,m,n,۲,\alpha,\beta,b)}{۲(۱-\alpha)+\Psi(\lambda,m,n,۲,\alpha,\beta,b)}\alpha_۱ z\right.\\
&\left.+\frac{۱}{۲(۱-\alpha)+\Psi(\lambda,m,n,۲,\alpha,\beta,b)}.\sum_{k=۲}^{\infty}\Psi(\lambda,m,n,۲,\alpha,\beta,b)\alpha_k z^k\right)\\
&\ge ۱-\frac{\Psi(\lambda,m,n,۲,\alpha,\beta,b)}{۲(۱-\alpha)+\Psi(\lambda,m,n,۲,\alpha,\beta,b)}r\\
&-\frac{۱}{۲(۱-\alpha)+\Psi(\lambda,m,n,۲,\alpha,\beta,b)}\sum_{k=۲}^{\infty}\Psi(\lambda,m,n,۲,\alpha,\beta,b)|\alpha_k|r^k\\
&>۱-r,۰\,(|z|=r<۱)
\end{aligned}$$

که در آن از قضیه ۲ و از قضیه ۱ نیز استفاده شده است. این مطلب به‌وضوح نامساوی (۷) را ثابت می‌کند. لذا رابطه تبعیت (۶) حاصل می‌شود. نامساوی (۷) از (۶) با قرار دادن $g(z)=\frac{z}{1-z}=\sum_{k=1}^{\infty} z^k \in K$ به‌دست می‌آید. سرانجام تابع $q(z)$ تعریف شده به شکل

$$q(z)=z-\frac{2(1-\alpha)}{\Psi(\lambda,m,n,2,\alpha,\beta,b)}z^2 \quad (11)$$

را در نظر می‌گیریم که آن هم عضوی از رده $\hat{N}_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$ است. پس با استفاده از (۶) داریم

$$\Omega_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)\cdot q(z)\prec\frac{z}{1-z}(z\in\mathbb{D})$$

که در آن $\Omega_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda)$ در (۸) تعریف شده است و این اثبات را تمام می‌کند. برای دقیق بودن، به‌راحتی می‌توان نشان داد که

$$\min\left\{\operatorname{Re}\left(\Omega_{m,n}(b,\alpha,\beta,\lambda),q(z)\right)\right\}=\frac{-1}{2}$$

در این جا اثبات به پایان می‌رسد. □

با قراردادن

$$m=1, n=1, \beta=0, b=1, \lambda=1$$

در قضیه ۳، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱. فرض کنید f به شکل (۱) تعریف و از رده $S^*(\alpha)$ و $g\in K$ باشد. در این صورت

$$\left(\frac{2-\alpha}{2(3-2\alpha)}\right)\cdot(f*g)(z)\prec g(z)(z\in\mathbb{D}) \quad (12)$$

و

$$\operatorname{Re}(f(z))>-\frac{(3-2\alpha)}{(2-\alpha)}(z\in\mathbb{D}).$$

عامل ثابت در رابطه تبعیت (۱۲) را نمی‌توان با یک مقدار بزرگتر از $\frac{2-\alpha}{2(3-2\alpha)}$ جایگزین کرد.

نتیجه ۲. فرض کنید f به شکل (۱) تعریف و از رده $K(\alpha)$ باشد. همچنین $g\in K$ باشد. در این صورت

$$\left(\frac{2-\alpha}{(5-3\alpha)}\right).(f*g)(z)\prec g(z)(z\in\mathbb{D}) \quad (13)$$

و

$$\operatorname{Re}(f(z))>-\frac{(5-3\alpha)}{2(2-\alpha)},(z\in\mathbb{D}).$$

عامل ثابت $\frac{2-\alpha}{(5-3\alpha)}$ در نتیجه رابطه تبعیت (۱۳) را نمی‌توان با یک مقدار بزرگتر از آن عوض کرد.

References

[1] F.M. Al-Oboudi, On univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator, Ind. J. Math. Math. Sci. , 2004 (2004) 1429-1436.

[2] G.S. Salagean, Subclasses of univalent functions, in: Complex Analysis—Fifth Romanian-Finnish Seminar, Springer, Berlin, Heidelberg, 1983, pp. 362-372.

[3] S.S. Miller, P.T. Mocanu, Differential subordinations: theory and applications, in: Program of Monographs and Text books in pure and Applied Mathematics, MAREAL Dekker, New York, Basel, 2000.

[4] S. Owa, M. Nunokawa, H. Saitoh, H.M. Srivastava, Close-to-convexity, starlikeness, and convexity of certain analytic functions, Appl. Math. Lett., 15 (2002) 63-69.

[5] H. Mahzoon, S. Latha, On the classes of analytic functions involving al-oboudi operator, Int. J. Math. Anal., 4 (2010) 193-199.

[6] H.S. Wilf, Subordinating factor sequences for convex maps of the unit circle, Proc. Amer. Math. Soc., 12 (1961) 689-693.