Complex and Nonlinear Systems
Vol. 1, No. 1, Autumn 2017, pp. 93-100

سیستم‌های مختلط و غیرخطی
سال ۱، دوره ۱، شماره ۱، پاییز ۱۳۹۶، صص ۹۳ تا ۱۰۰

قضیه همگرایی برای مسئله نقطه ثابت و دستگاه نامساوی تغییراتی

وحید داداشی*

استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد ساری

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۵/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۸/۱۷

Convergence theorem for fixed point problems and system of variational inequalities

Vahid Dadashi*

Assistant Professor, Department of Mathematics, Sari Branch, Islamic Azad University

Received: 8/17/2017 Accepted: 11/8/2017

چکیده: در این مقاله یک الگوریتم تکرار ترکیبی ضمنی را برای تقریب نقطه ثابت نگاشت شبه‌انقباضی پیوسته از یک زیرمجموعه محدب بسته ناتهی از یک فضای باناخ به توی خودش معرفی و مطالعه می‌کنیم. همگرایی قوی دنباله تولید شده توسط الگوریتم به نقطه ثابت را اثبات می‌کنیم که جواب دستگاه نامساوی تغییراتی نیز می‌باشد.

کلمات کلیدی: الگوریتم تکرار ترکیبی ضمنی، نگاشت شبه‌انقباضی، دستگاه نامساوی تغییراتی.

Abstract: In this paper we propose and study an implicit composite iterative scheme for the approximation of a fixed point of a continuous pseudocontractive mapping from a closed convex set into itself. The strong convergence of the sequence defined by the iterative sequence is proved, which is also the common unique solution of a system of variational inequalities.

Keywords: implicit composite iterative algorithm, pseudocontractive mapping, system of variational inequalities.

۱ مقدمه

مسئله نامساوی‌های تغییراتی از مسئله‌های جالب مورد مطالعه در ریاضیات می‌باشند و دارای کاربردهای وسیعی در زمینه‌های مختلف نظیر بهینه سازی، معادلات دیفرانسیل جزئی، اقتصاد، تعادل، علوم مهندسی و غیره می‌باشند. در چهار دهه اخیر، حل مسئله نامساوی‌های تغییراتی توسط بسیاری از محققین مورد مطالعه قرار گرفته است. در ابتدا نتایج وجودی اولیه برای نامساوی‌های تغییراتی توسط استمپاچیا[1] در ۱۹۶۴، [۱]، لیونز[2] و استمپاچیا در ۱۹۶۵ مورد بررسی قرار گرفت (هم چنین [۲] و [۳] را ببینید). وجود جواب برای نامساوی‌های تغییراتی و دیگر مسئله‌های مرتبط با آن تبدیل به یک موضوع پایه‌ای برای تحقیق شده است و نظر محققین در ریاضیات کاربردی را نیز به خود جلب

[1] G. Stampacchia
[2] J.L. Lions

*Corresponding author: vahid.dadashi@iausari.ac.ir

*نویسنده مسئول

کرده است. در این مورد می‌توان به منابع [۴، ۵، ۶] مراجعه نمود.

در سال‌های اخیر نتایج وجودی و الگوریتم‌های تکرار زیادی برای مسئله نامساوی‌های تغییراتی گوناگون معرفی شده است. برای جزئیات بیشتر می‌توان به [۷–۱۳] و منابع موجود در آنها مراجعه نمود.

اخیراً، مسئله‌های جدید و جالبی موسوم به دستگاه نامساوی تغییراتی معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است. پنگ[1] [۱۴]، کوهن و چاپلایس[2] [۱۵]، بیانچی[3] [۱۶] و انصاری و یائو[4] [۱۷] یک دستگاه از نامساوی‌های تغییراتی را در نظر گرفتند. پنگ نشان داد که مسئله تعادل حمل و نقل، مسئله تعادل فاصله‌ای، مسئله تعادل نش و مسئله برنامه‌سازی تعادل عمومی می‌توانند به عنوان یک دستگاه نامساوی تغییراتی مدل‌سازی شود.

در این مقاله، با توجه به موارد گفته شده بالا، یک الگوریتم تکرار جدیدی را در فضای باناخ معرفی و مورد مطالعه قرار می‌دهیم و وجود جواب را برای دستگاه نامساوی تغییراتی ثابت می‌کنیم. همچنین، همگرایی الگوریتم تکرار جدید به جواب دستگاه نامساوی تغییراتی را ثابت می‌کنیم که یک نقطه ثابت یک نگاشت نیز می‌باشد. نتایج به‌دست‌آمده در این مقاله سبب بهبود برخی نتایج از نامساوی‌های می‌باشد.

۲ تعریف‌ها و لم‌های مورد نیاز

فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته محدب و غیرتهی از فضای باناخ حقیقی E با فضای دوگان E^* باشد و مقدار $x^* \in E^*$ در $x \in E$ را با $\langle x^*, x \rangle$ نشان می‌دهیم. نگاشت J از E به‌توی خانواده غیر تهی از زیرمجموعه‌های w^*–فشرده از فضای دوگان E^* که برای هر $x \in E$ به‌صورت

$$J(x) = \left\{ x^* \in E^* : \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \right\}$$

تعریف می‌شود را نگاشت دوگانگی می‌نامیم [۱۸].

تعریف ۱. نگاشت $T : C \to C$ را شبه‌انقباضی می‌نامیم اگر برای هر $x, y \in C$، $j(x-y) \in J(x-y)$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\langle Tx - Ty, j(x-y) \rangle \le \|x-y\|^2.$$

تعریف ۲. خودنگاشت $f : C \to H$ را انقباضی ضعیف روی C می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in C$،

$$\|f(x) - f(y)\| \le \|x-y\| - \varphi(\|x-y\|)$$

که $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ یک تابع اکیداً صعودی پیوسته است، به‌طوری‌که $\phi(0) = 0$ و $\phi(t) \to +\infty$ هنگامی که $t \to +\infty$.

مجموعه همه نقاط ثابت T را با $F(T)$ نشان می‌دهیم، یعنی $F(T) = \{x \in C : x = Tx\}$.

براودر[5] [۱۹] مطالعه رده‌های معینی از عملگرهای غیرخطی را با استفاده از نگاشت دوگانگی ابداع نمود. با پیروی از براودر تعریف زیر را داریم.

[1] J.S. Pang
[2] G. Cohen and F. Chaplais
[3] M. Bianchi
[4] J.C. Yao

[5] F.E. Browder

تعریف ۳. نگاشت دوگانگی در فضای باناخ، پیوسته ضعیف دنباله‌ای X است اگر تک‌مقداری و پیوسته از توپولوژی ضعیف به توپولوژی ضعیف ستاره باشد، یعنی برای هر دنباله همگرای ضعیف $\{x_n\}$ به x، دنباله $\{J(x_n)\}$ به‌طور ضعیف ستاره به $J(x)$ همگرا باشد.
بدیهی است که l_p دارای نگاشت دوگانگی پیوسته ضعیف است.

تعریف ۴. [۲۰] فضای باناخ X را فضای آپیال[1] می‌نامیم اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ در X به‌طوری‌که $\{x_n\}$ همگرای ضعیف به یک x است، نامساوی زیر برقرار باشد

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|, \ \forall y \neq x.$$

هر فضای هیلبرت یک فضای آپیال است. در حقیقت لم زیر را داریم.

لم ۱. [۲۱] فرض کنید E یک فضای باناخ باشد که دارای یک نگاشت دوگانگی پیوسته دنباله‌ای ضعیف باشد. آنگاه E در شرط آپیال صدق می‌کند. به‌ویژه، فضاهای l_p $(۱< p <\infty)$ فضاهای آپیال هستند، اما L_p $(۱< p <\infty, p \neq ۲)$ فضاهای آپیال نیستند. Eرا یک فضای باناخ انعکاسی یا زیر مجموعه محدب بسته ناتهی از E و $T: K \to K$ را نگاشت شبه‌انقباضی پیوسته در نظر بگیرید. آنگاه $I-T$ نیم‌بسته در صفر است، یعنی اگر $\{x_n\}$ یک دنباله همگرای ضعیف به xباشد به‌طوری‌که $\{(I-T)x_n\}$ همگرای قوی به y باشد، آنگاه $(I-T)x = y$.

در این مقاله، مسئله زیر را به‌منظور پیدا کردن $p \in F(T)$ در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که p جواب یکتای دستگاه نامساوی تغییراتی زیر است:

$$\begin{cases} \langle (I-f)p, j(p-q)\rangle \leq ۰, & \forall q \in F(T), \\ \langle (I-g)p, j(p-q)\rangle \leq ۰, & \forall q \in F(T). \end{cases} \qquad (۱)$$

به‌ویژه اگر f را مساوی g در نظر بگیریم، آنگاه مسئله (۱) به مسئله ساده‌تر زیر تبدیل می شود:
پیدا کردن $p \in F(T)$ به‌طوری‌که نامساوی

$$\langle (I-f)p, j(p-q)\rangle \leq ۰, \quad \forall q \in F(T). \qquad (۲)$$

برقرار باشد. در این بخش، الگوریتم تکرار ترکیبی ضمنی زیر را معرفی و مطالعه می‌کنیم که دستگاه نامساوی تغییراتی (۱) را حل می‌کند

$$\begin{cases} x_{t,s} = tf(x_{t,s}) + (۱-t)y_{t,s}, \\ y_{t,s} = sg(x_{t,s}) + (۱-s)T(x_{t,s}), \end{cases} \qquad (۳)$$

که در آن T یک نگاشت شبه‌انقباضی پیوسته از مجموعه محدب بسته C به‌توی خودش و $f, g: C \to C$ نگاشت‌های انقباضی ضعیف با تابع ϕ هستند.

۳ تحلیل همگرایی

در این بخش یک قضیه همگرایی قوی از الگوریتم تکرار (۳) را ثابت می‌کنیم که توسیعی از قضیه ۱.۳ از [۱۲] است.

قضیه ۱. فرض کنید E یک فضای باناخ انعکاسی حقیقی باشد که یک نگاشت دوگانگی پیوسته دنباله‌ای ضعیف از E به E^* موجود باشد. همچنین فرض

[1] Z. Opial

کنید که C یک زیرمجموعه محدب بسته ناتهی از E و T یک نگاشت شبه‌انقباضی پیوسته از C به توی خودش باشد، به‌طوری‌که $F(T)\neq\emptyset$ و $f, g: C\to C$ نگاشت‌های انقباضی ضعیف با تابع ϕ باشند. فرض کنید $\{x_{t,s}: 0<t<1, 0<s<1\}$ تعریف شده توسط الگوریتم (۳) باشد، آنگاه هنگامی‌که $t\to 0$ و $s\to 0$، نتیجه می‌شود $x_{t,s}$ همگرای قوی به نقطه ثابت $p\in F(T)$ است به‌طوری‌که p جواب یکتای دستگاه نامساوی تغییراتی زیر باشد:

$$\begin{cases}\langle (I-f)p, j(p-q)\rangle \leq 0, & \forall q\in F(T),\\ \langle (I-g)p, j(p-q)\rangle \leq 0, & \forall q\in F(T).\end{cases} \tag{۴}$$

برهان: فرض کنید S^f برای هر $t,s\in(0,1)$ به‌صورت

$$S^f := tf + (1-t)[sg+(1-s)T]$$

تعریف شده باشد. آنگاه برای هر $x, y\in C$ داریم

$$\begin{aligned}&\langle S^f x - S^f y, j(x-y)\rangle\\ &= t\langle f(x)-f(y), j(x-y)\rangle\\ &\quad +(1-t)s\langle g(x)-g(y), j(x-y)\rangle\\ &\quad +(1-t)(1-s)\langle Tx-Ty, j(x-y)\rangle\\ &\leq \|x-y\|^2 - \big(t+(1-t)s\big)\varphi\big(\|x-y\|\big)\|x-y\|,\end{aligned}$$

از این‌رو S^f یک نگاشت به‌طور قوی ϕ شبه‌انقباضی پیوسته است و لذا از قضیه ۱ در [۲۲] نتیجه می‌گیریم که S^f برای هر t,s دارای یک نقطه ثابت منحصربفرد $x_{t,s}$ در C می‌باشد، این یعنی اینکه $\{x_{t,s}\}$ تعریف شده توسط (۳) خوش‌تعریف است. حال نشان می‌دهیم که هر یک از نامساوی‌های تغییراتی (۴) دارای جواب منحصربه‌فرد در $F(T)$ می‌باشند. در واقع اگر $p,q\in F(T)$ در (۴) صدق کنند، خواهیم داشت

$$\langle f(p)-p, j(q-p)\rangle \leq 0, \tag{۵}$$

$$\langle f(q)-q, j(p-q)\rangle \leq 0. \tag{۶}$$

با جمع کردن (۵) و (۶) داریم

$$\begin{aligned}0 &\geq \langle (I-f)p-(I-f)q, j(p-q)\rangle\\ &= \langle p-q, j(p-q)\rangle - \langle f(p)-f(q), j(p-q)\rangle\\ &\geq \|p-q\|^2 - \|p-q\|^2 + \varphi(\|p-q\|)\|p-q\|.\end{aligned}$$

با استفاده از $\phi\big(\|p-q\|\big)=\|p-q\|\varphi\big(\|p-q\|\big)$ به‌دست می‌آوریم

$$\phi\big(\|p-q\|\big)\leq 0.$$

از ویژگی φ نتیجه می‌شود که $p=q$ و آنگاه جواب نامساوی تغییراتی اول از (۴) منحصربه‌فرد است. به‌طورمشابه جواب نامساوی تغییراتی دوم از (۴) نیز منحصربه‌فرد است. اکنون نشان می‌دهیم که $\{x_{t,s}\}$ کران‌دار است. در واقع با در نظر گرفتن نقطه ثابت دلخواه $q\in F(T)$ و با استفاده از (۳) داریم:

$$\begin{aligned}\|x_{t,s}-q\|^2 &= t\langle f(x_{t,s})-f(q), j(x_{t,s}-q)\rangle + t\langle f(q)-q, j(x_{t,s}-q)\rangle\\ &\quad +(1-t)s\langle g(x_{t,s})-g(q), j(x_{t,s}-q)\rangle + (1-t)s\langle g(q)-q, j(x_{t,s}-q)\rangle\\ &\quad +(1-t)(1-s)\langle Tx_{t,s}-q, j(x_{t,s}-q)\rangle\\ &\leq t\|x_{t,s}-q\|^2 - t\varphi\big(\|x_{t,s}-q\|\big)\|x_{t,s}-q\| + t\langle f(q)-q, j(x_{t,s}-q)\rangle + (1-t)s\|x_{t,s}-q\|^2\\ &\quad -(1-t)s\varphi\big(\|x_{t,s}-q\|\big)\|x_{t,s}-q\| + (1-t)s\langle g(q)-q, j(x_{t,s}-q)\rangle\\ &\quad +(1-t)(1-s)\|x_{t,s}-q\|^2\end{aligned} \tag{۷}$$

$$\le t\left\|x_{t,s}-q\right\|^{2}-t\varphi\left(\left\|x_{t,s}-q\right\|\right)\left\|x_{t,s}-q\right\|+t\left\|f(q)-q\right\|\left\|x_{t,s}-q\right\|+(1-t)s\left\|x_{t,s}-q\right\|^{2}$$
$$-(1-t)s\varphi\left(\left\|x_{t,s}-q\right\|\right)\left\|x_{t,s}-q\right\|+(1-t)s\left\|g(q)-q\right\|\left\|x_{t,s}-q\right\|$$
$$+(1-t)(1-s)\left\|x_{t,s}-q\right\|^{2}$$
$$=\left\|x_{t,s}-q\right\|^{2}+t\left\|f(q)-q\right\|\left\|x_{t,s}-q\right\|+(1-t)s\left\|g(q)-q\right\|\left\|x_{t,s}-q\right\|$$
$$-(t+(1-t)s)\varphi(\left\|x_{t,s}-q\right\|)\left\|x_{t,s}-q\right\|.$$

بنابراین

$$(t+(1-t)s)\varphi\left(\left\|x_{t,s}-q\right\|\right)\le t\left\|f(q)-q\right\|+(1-t)s\left\|g(q)-q\right\|$$

و از این‌رو

$$\varphi\left(\left\|x_{t,s}-q\right\|\right)\le\frac{t}{t+(1-t)s}\left\|f(q)-q\right\|+\frac{(1-t)s}{t+(1-t)s}\left\|g(q)-q\right\|\le\max\left\{\left\|f(q)-q\right\|,\left\|g(q)-q\right\|\right\}$$

که نتیجه می‌دهد $\left\{\varphi\left(\left\|x_{t,s}-q\right\|\right)\right\}$ کران‌دار است و با استفاده از ویژگی ϕ ، $\left\{\left\|x_{t,s}-q\right\|\right\}$ و سپس

$$\left\{x_{t,s}:0<t<1,0<s<1\right\}$$

نیز کران‌دار است. از به‌طور ضعیف انقباضی بودن f داریم

$$\left\|f(x_{t,s})-f(q)\right\|\le\left\|x_{t,s}-q\right\|-\varphi\left(\left\|x_{t,s}-q\right\|\right)\le\left\|x_{t,s}-q\right\|$$

و به‌طور مشابه

$$\left\|g(x_{t,s})-g(q)\right\|\le\left\|x_{t,s}-q\right\|.$$

آنگاه مجموعه‌های $\{f(x_{t,s}):t,s\in(0,1)\}$ و $\{g(x_{t,s}):t,s\in(0,1)\}$ کران‌دار هستند. با استفاده از (۳) به‌دست می‌آوریم:

$$y_{t,s}=\frac{1}{1-t}x_{t,s}-\frac{t}{1-t}f(x_{t,s}),$$
$$Tx_{t,s}=\frac{1}{1-s}y_{t,s}-\frac{s}{1-s}g(x_{t,s})$$

و از این‌رو

$$\left\|y_{t,s}\right\|\le\frac{1}{1-t}\left\|x_{t,s}\right\|+\frac{t}{1-t}\left\|f(x_{t,s})\right\|,$$
$$\left\|Tx_{t,s}\right\|\le\frac{1}{1-s}\left\|y_{t,s}\right\|+\frac{s}{1-s}\left\|g(x_{t,s})\right\|.$$

بنابراین مجموعه $\{y_{t,s}\}$ و همچنین $\{Tx_{t,s}\}$ نیز کران‌دارند. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}&\left\|Tx_{t,s}-x_{t,s}\right\|\\&=\left\|\frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{1-t}x_{t,s}-\frac{t}{1-t}f(x_{t,s})\right)-\frac{s}{1-s}g(x_{t,s})-x_{t,s}\right\|\\&\le\frac{t}{(1-s)(1-t)}\left\|x_{t,s}-f(x_{t,s})\right\|+\frac{s}{1-s}\left\|g(x_{t,s})-x_{t,s}\right\|\to 0,\end{aligned}\tag{۸}$$

هنگامی که $t\to 0$ و $s\to 0$. اکنون نشان می‌دهیم که دنباله $\{x_{t,s}\}$ به‌طور دنباله‌ای فشرده است. چون E انعکاسی و $\{x_{t,s}\}$ کران‌دار می‌باشند، پس یک زیردنباله $x_n:=x_{t_n s_n}$ وجود دارد به‌طوری‌که x_n همگرای ضعیف به q است. با توجه به رابطه (۸)،

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n-Tx_n\right\|=0.$$

این به همراه لم ۵ و لم ۶ نتیجه می‌شود $q\in F(T)$. از (۸) به‌دست می‌آوریم :

$$\begin{aligned}&(t_n+(1-t_n)s_n)\phi(x_n-q)\\ &\le t_n\langle f(q)-q, j(x_n-q)\rangle\\ &+(1-t_n)s_n\langle g(q)-q, j(x_n-q)\rangle.\end{aligned} \tag{۹}$$

چون نگاشت دوگانگی J تک‌مقداری و پیوسته دنباله‌ای ضعیف از E به E^* است، با استفاده از رابطه (۹) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\phi\left(\|x_n-q\|\right)&\le \frac{t_n}{t_n+(1-t_n)s_n}\langle f(q)-q, j(x_n-q)\rangle+\frac{(1-t_n)s_n}{t_n+(1-t_n)s_n}\langle g(q)-q, j(x_n-q)\rangle\\ &\le \max\left\{\langle f(q)-q, j(x_n-q)\rangle, \langle g(q)-q, j(x_n-q)\rangle\right\}\to 0\ as\ \ n\to\infty.\end{aligned}$$

بنابراین

$$0\le \limsup_{n\to\infty}\phi\left(\|x_n-q\|\right)\le 0$$

و از این‌رو $\lim_{n\to\infty}\phi\left(\|x_n-q\|\right)=0$. اکنون ویژگی φ نتیجه می‌دهد که $\{x_n\}$ همگرای قوی به $q\in F(T)$ است و آنگاه $\{x_{t,s}\}$ به‌طور دنباله‌ای فشرده است، یعنی یک زیردنباله $\{x_n\}\subset\{x_{t,s}\}$ وجود دارد به‌طوری‌که همگرای قوی به $q\in F(T)$ است هنگامی‌که $n\to\infty$. ادعا می‌کنیم که q یک جواب در $F(T)$ برای دستگاه نامساوی تغییراتی (۴) است. در واقع از (۳) برای هر $u\in F(T)$ داریم:

$$\begin{aligned}\langle x_{t,s}-f(x_{t,s}), j(x_{t,s}-u)\rangle &= (1-t)\langle y_{t,s}-f(x_{t,s}), j(x_{t,s}-u)\rangle\\ &= (1-t)s\langle g(x_{t,s})-f(x_{t,s}), j(x_{t,s}-u)\rangle\\ &\ \ +(1-t)(1-s)\langle Tx_{t,s}-f(x_{t,s}), j(x_{t,s}-u)\rangle\\ &= (1-t)s\langle g(x_{t,s})-x_{t,s}, j(x_{t,s}-u)\rangle+(1-t)s\langle x_{t,s}-f(x_{t,s}), j(x_{t,s}-u)\rangle\\ &\ \ +(1-t)(1-s)\langle Tx_{t,s}-q, j(x_{t,s}-u)\rangle\\ &\ \ +(1-t)(1-s)\langle u-x_{t,s}, j(x_{t,s}-u)\rangle\\ &\ \ +(1-t)(1-s)\langle x_{t,s}-f(x_{t,s}), j(x_{t,s}-u)\rangle\\ &\le (1-t)s\langle g(x_{t,s})-x_{t,s}, j(x_{t,s}-u)\rangle\\ &\ \ +(1-t)\langle x_{t,s}-f(x_{t,s}), j(x_{t,s}-u)\rangle.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}&t\langle x_{t,s}-f(x_{t,s}), j(x_{t,s}-q)\rangle\\ &\le (1-t)s\langle g(x_{t,s})-x_{t,s}, j(x_{t,s}-q)\rangle\end{aligned}$$

با حد گرفتن از رابطه بالا هنگامی که $s\to 0$ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}&\limsup_{s\to 0}\langle x_{t,s}-f(x_{t,s}), j(x_{t,s}-q)\rangle\\ &\le \limsup_{s\to 0}(1-t)s\langle g(x_{t,s})-x_{t,s}, j(x_{t,s}-q)\rangle=0,\\ &\forall t\in(0,1]\end{aligned}$$

و ازاین‌رو

$$\limsup_{s\to 0}\langle x_{t,s}-f(x_{t,s}), j(x_{t,s}-q)\rangle\le 0.$$

حال دوباره از رابطه بالا حد می‌گیریم هنگامی‌که $t \to 0$. پس به‌دست می‌آوریم

$$\limsup_{t,s\to 0}\langle x_{t,s}-f(x_{t,s}), j(x_{t,s}-q)\rangle \le 0. \quad (10)$$

چون نگاشت دوگانگی J تک‌مقداری و پیوسته دنباله‌ای ضعیف از E به E^* است، با استفاده از $x_n \to q (n\to\infty)$ برای هر ثابت $u\in F(T)$ از (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}&\langle q-f(q), j(q-u)\rangle\\ &=\lim_{n\to\infty}\langle x_n-f(x_n), j(x_n-q)\rangle\\ &\le \limsup_{t,s\to 0}\langle x_{t,s}-f(x_{t,s}), j(x_{t,s}-q)\rangle \le 0.\end{aligned}$$

به‌طور مشابه، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}&\langle q-g(q), j(q-u)\rangle\\ &=\lim_{n\to\infty}\langle x_n-g(x_n), j(x_n-q)\rangle\\ &\le \limsup_{t,s\to 0}\langle x_{t,s}-g(x_{t,s}), j(x_{t,s}-q)\rangle \le 0.\end{aligned}$$

لذا $q\in F(T)$ یک جواب دستگاه نامساوی تغییراتی (۴) است. سرانجام ثابت می‌کنیم که تور $\{x_{t,s}\}$ همگرا به q است. فرض کنید که یک زیردنباله دیگر $x_k := x_{t_k,s_k}$ موجود باشد به‌طوری‌که $x_k \to u$. از این‌رو $u\in F(T)$ و u جواب دستگاه نامساوی تغییراتی (۴) است. با استفاده از یکتایی جواب نتیجه می‌شود که $q=u=p$. به‌طور خلاصه، ثابت کردیم که دنباله $\{x_{t,s}\}$ به‌طور دنباله‌ای فشرده است و هر نقطه حدی از $\{x_{t,s}\}$ مساوی با p است. در نتیجه، $x_{t,s}\to p$ هنگامی‌که $t,s\to 0$ و این برهان را کامل می‌کند. □

نتیجه ۱. [۱۶] فرض کنید E یک فضای باناخ انعکاسی حقیقی باشد که یک نگاشت دوگانگی پیوسته دنباله‌ای ضعیف از E به E^* موجود باشد. همچنین فرض کنید که C یک زیرمجموعه محدب بسته ناتهی از E و T یک نگاشت شبه‌انقباضی پیوسته از C به‌توی خودش باشد به‌طوری‌که $F(T)\neq\emptyset$ و $f,g:C\to C$ نگاشت‌های انقباضی ضعیف با تابع ϕ باشند. فرض کنید $\{x_{t,s}: 0<t<1, 0<s<1\}$ تعریف شده توسط الگوریتم

$$\begin{cases} x_{t,s}=tf(x_{t,s})+(1-t)y_{t,s},\\ y_{t,s}=sx_{t,s}+(1-s)T(x_{t,s}),\end{cases}$$

باشد، آنگاه هنگامی که $t\to 0$ و $s\to 0$، نتیجه می‌شود $x_{t,s}$ همگرای قوی به نقطه ثابت $p\in F(T)$ است به‌طوری‌که p جواب یکتای نامساوی تغییراتی زیر است:

$$\langle (I-f)p, j(p-q)\rangle \le 0, \quad \forall q\in F(T).$$

References

[1] G. Stampacchia, Formes Bilinaires Coercitives sur les Ensembles Convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258 (1964) 4413-4416.

[2] P. Hartmann, G. Stampacchia, On some nonlinear elliptic differential functional equations. Acta. Math., 115 (1966) 153-188.

[3] J.L. Lions, G. Stampacchia, Inequations Variationnelles non Coercives, C. R. Acad. Sci. Paris, 261 (1965) 25-27.

[4] D. Aussel, N. Hadjisavvas N, On quasimonotone variational inequalities. J. Optim. Theory Appl., 121 2004 445-450.

[5] F. Giannessi, A. Maugeri, Variational analysis and applications. In: Proceedings of the 38th Conference of the School of Mathematics G. Stampacchia in memory of Stampacchia and J.-L. Lion held in Erice, June 20 July 1, 2003. Nonconvex Optimization and Its Applications, vol. 79. Springer, New York, 2005.

[6] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications, Academic Press, San Diego, 1980.

[7] M. Alimohammady, V. Dadashi, Convergence of a generalized iterations for a countable family of nonexpansive mappings, TJMM, 4 (2012) 15-24.

[8] R.D. Chen, H.M. He, M.A. Noor, Modified mann iterations for nonexpansive semigroups in Banach space, Acta. Math. Sin., 26 (2010) 193-202.

[9] V. Dadashi, S. Amjadi, A General Iterative Algorithm for Hierarchical Fixed Points Problems and Variational Inequalities, Int. J. Anal. Appl., 13 (2017) 54-63.

[10] V. Dadashi, S. Ghafari, Convergence theorems of iterative approximation for finding zeros of accretive operator and fixed points problems, Int. J. Nonlinear Anal. Appl., 4 (2013) 53-61.

[11] Y.R. He, X.Z. Mao, M. Zhou, Strict Feasibility of Variational Inequalities in Reflexive Banach Spaces, Acta. Math. Sin., 23 (2007) 563-570.

[12] S. Li, Y. Sub, L. Zhang, H. Zhao, L. Li, Viscosity approximation methods with weak contraction for L-Lipschitzian pseudocontractive self-mapping, Nonlinear Anal., 74 (2011) 1031-1039.

[13] Y. Yao, Y.J. Cho, Y.C. Liou, Iterative algorithms for hierarchical fixed points problems and variational inequalities, Math. Comput. Model., 52 (2010) 1697-1705.

[14] J.S. Pang, Asymmetric variational inequality problems over product sets: Applications and iterative methods, Math. Program., 31 (1985) 206-219.

[15] G. Cohen, F. Chaplais, Nested monotony for variational inequalities over a product of spaces and convergence of iterative algorithms, J. Optim. Theory Appl., 59 (1988) 360-390.

[16] M. Bianchi, Pseudo P-monotone operators and variational inequalities, Report 6, Istituto di econometria e Matematica per le decisioni economiche, Universita Cattolica del Sacro Cuore, Milan, Italy, 1993.

[17] Q.H. Ansari, J.C. Yao, A fixed point theorem and its applications to a system of variational inequalities, Bull. Austral. Math. Soc., 59 (1999) 433-442.

[18] I. Cioranescu, Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems. Mathematics and Its Applications of Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, vol 6, 1990.

[19] F.E. Browder, Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in Banach spaces, Mathematische Zeitschrift, 100 (1967) 201-225.

[20] Z. Opial, Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967) 591-597.

[21] J.P. Gossez, E.L. Dozo, Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings, Pacific J. Math., 40 (1972) 565-573.

[22] M.O. Osilike, Stable iteration procedure for strong pseudocontractions and nonlinear equations of the accretive type, Math. Anal. Appl., 204 (1996) 667-692.