# بررسی رده‌ای از مسائل غیرخطی با شرط مرزی دیریکله

سعید شکوه*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۷/۰۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۱۸

# On a class of nonlinear problems with Dirichlet boundary condition

Saeid Shokooh*

Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Gonbad Kavous University

Received: 9/24/2017 Accepted: 1/8/2018

**چکیده:** در این مقاله رده‌ای از مسائل غیرخطی با شرط مرزی دیریکله را با روش تغییراتی مورد بررسی قرار دادیم. وجود بی‌نهایت جواب را برای این‌گونه مسائل اثبات و چند نتیجه از آن را نیز مطرح کردیم.

**کلمات کلیدی:** شرط مرزی دیریکله، روش تغییراتی، بی‌نهایت جواب.

**Abstract**: In this paper, by applying variational method, we study a class of nonlinear problems with Dirichlet boundary condition. We establish the existence of infinitely many solutions for such problems and we also provide some particular cases of our main result.

**Keywords**: Dirichlet boundary condition, variational method, infinitely many solutions.

## ۱ مقدمه

معادلات دیریکله[۱] به‌فرم

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2}}}\right) = f(t,u) \ \ in \ \ \Omega, \\ u = 0 \quad on \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{۱}$$

نقش مهمی در هندسه دیفرانسیل و در نظریه نسبیت ایفا می‌کنند (مرجع [۱] را مشاهده نمایید). در سال‌های اخیر وجود و چندگانگی جواب‌های مثبت برای مسئله (۱) توسط ریاضیدان‌های مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است (مراجع [۲ تا ۴] را مشاهده نمایید). به عنوان مثال نویسندگان در [۵] وجود جواب‌های مثبت برای مسئله

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2}}}\right) = \lambda f(t,u) \ \ in \ \ \Omega, \\ u = 0 \quad on \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{۲}$$

را با مقایسه $F(t,\xi) := \int_0^{\xi} f(t,x)\,dx$ و $\xi^2$ نزدیک صفر و $\xi$ در بی‌نهایت، بررسی کرده‌اند. در مقاله فوق با توجه به حدهای $\dfrac{F(t,\xi)}{\xi^2}$ در صفر و $\dfrac{F(t,\xi)}{\xi}$ در بی‌نهایت، وجود و چندگانگی یا بی‌نهایت جواب برای

[۱] Dirichlet

*Corresponding author: sd.shokooh@gmail.com

*نویسنده مسئول

مسئله (۲) ثابت شده است. در واقع نویسندگان با استفاده از روش جواب بالایی و پایینی و روش کمینه‌سازی[1]، اثبات کرده‌اند که اگر $\limsup_{\xi\to 0^+}\frac{F(\xi)}{\xi^2}=+\infty$ و $\liminf_{\xi\to 0^+}\frac{F(\xi)}{\xi^2}=+\infty$، آنگاه به‌ازای $\lambda>0$ مسئله (۲) در حالت تفکیک شده، یک دنباله از جواب‌های ضعیف مثبت می‌پذیرد. همچنین در [۵] یکی از فرض‌های کلیدی،

$$\limsup_{\xi\to 0^+}\frac{\int_{\omega}F(x,\xi)dx}{\xi^2}=+\infty$$

است که $\omega$ یک زیر مجموعه باز از $\Omega$ می‌باشد و به‌علاوه در [۵] فرض‌هایی که روی رفتار $F$ در صفر بود با شرایطی مناسب از ثابت‌های طیفی $\lambda_1^*$ و $\lambda_1^\#$ تعویض شده است.

هدف این مقاله مطالعه مسئله یک بعدی

$$\begin{cases}-\left(\left(1+\dfrac{u'^2}{\sqrt{1+u'^4}}\right)u'\right)'=\lambda f(t,u)\ \ in\ \ (0,1),\\ u(0)=0=u(1),\end{cases}\qquad (۳)$$

می‌باشد که $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع کاراتئودری[2]، $\lambda>0$ یک پارامتر حقیقی، $\Omega\subset\mathbb{R}^N$، $(N\geq 1)$، یک دامنه کراندار است.

هدف اصلی در این مقاله به‌دست آوردن شرایط کافی است تا تضمین کند برای $\lambda$های مناسب، مسئله (۳) بی‌نهایت جواب ضعیف نابدیهی نامنفی دارد که در $C^1$ به صفر همگراست. برای این منظور نیاز داریم تابع اولیه $f$ در شرایط مناسب صادق باشد. با استفاده از حالت زیر از اصل تغییراتی پروفسور ریچری[3] [۶] نتایج اصلی را اثبات می‌کنیم.

**قضیه ۱.** فرض کنیم $X$ یک فضای باناخ حقیقی انعکاسی و $\Phi,\Psi:X\to\mathbb{R}$ دو تابعک مشتق پذیر فرشه[4] باشند، به‌طوری که $\Phi$ نیم‌پیوسته ضعیف پایینی، به‌طور قوی پیوسته و اجباری و تابعک $\Psi$ نیم‌پیوسته ضعیف بالایی باشد. برای هر $r>\inf_{u\in X}\Phi(u)$ قرار می‌دهیم:

$$\phi(r):=\inf_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}\frac{\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}\Psi(u)-\Phi(u)}{r-\Phi(u)},$$

و

$$\delta:=\liminf_{r\to(\inf_X\Phi)^+}\phi(r).$$

در این‌صورت اگر $\delta<+\infty$، برای هر $\lambda\in(0,1/\delta)$ یکی از حالت‌های زیر برقرار است:

الف) یک مینیمم مطلق از تابع $\Phi$ هست که یک مینیمم موضعی از تابع $I_\lambda:=\Phi-\lambda\Psi$ می‌باشد، یا

ب) یک دنباله $\{u_n\}$ دوبه‌دو مجزا از نقاط بحرانی تابع $I_\lambda$ موجود است که به‌طور ضعیف به مینیمم مطلق تابع $\Phi$ همگراست و

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(u_n)=\inf_{u\in X}\Phi(u).$$

در مراجع [۷ تا ۹] و منابع مندرج در آنها اصل تغییراتی ریچری و گونه‌هایی از آن برای به‌دست آوردن بی‌نهایت جواب از مسائل مقدارمرزی استفاده شده‌است.

حال چند مفهوم را که در ادامه به آنها نیاز داریم بیان می‌کنیم. قرار می‌دهیم $X:=W_0^{1,2}((0,1))$ و نرم $\|u\|:=\left(\int_0^1|u'(t)|^2\right)^{1/2}$ را روی این فضا در نظر

1 Minimize
2 Caratheodory
3 Ricceri
4 Fréchet

می‌گیریم (جهت مطالعه فضاهای سوبولف[1] و خواص آنها مرجع [۱۰] را مشاهده نمایید). می‌دانیم $X$ به‌طور فشرده در $C^{\circ}([\circ,1])$ نشانده می‌شود و $\|u\|_{\infty} \leq \|u\|$ که $\|u\|_{\infty} := \max_{t\in[\circ,1]}|u(t)|$.

**تعریف ۱.** تابع $f : [\circ,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع $L^1$-کاراتئودری است هرگاه:

الف) تابع $t \mapsto f(t,x)$ به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$، اندازه‌پذیر باشد،

ب) تابع $x \mapsto f(t,x)$ پیوسته است به‌ازای تقریباً همه‌جا $t\in[\circ,1]$.

پ) به‌ازای هر $\rho > 0$، یک تابع $l_{\rho}\in L^1([\circ,1])$ وجود دارد که

$$\sup_{|x|\leq\rho}|f(t,x)| \leq l_{\rho}(t)$$

به‌ازای $t\in[\circ,1]$ تقریباً همه‌جا.

تابع اولیه $F$ از $f$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(t,\xi) := \int_{\circ}^{\xi} f(t,x)\,dx,$$

به‌ازای $(t,\xi)\in[\circ,1]\times\mathbb{R}$.

**تعریف ۲.** تابع $u\in X$ را یک جواب ضعیف از مسئله (۳) گویند، هرگاه برای هر $v\in X$ داشته باشیم:

$$\int_{\circ}^{1}\left(u'(t)v'(t) + \frac{u'^{3}(t)v'(t)}{\sqrt{1+u'^{4}(t)}}\right)dt - \lambda\int_{\circ}^{1} f(t,u(t))v(t)dt = \circ$$

## ۲ نتایج اصلی

در این بخش نتایج اصلی را بیان خواهیم نمود.

**قضیه ۲.** تعریف می‌کنیم

$$B^{\circ} := \limsup_{\xi\to\circ^{+}} \frac{\int_{1/4}^{3/4} F(t,\xi)dt}{\xi^{2}}$$

و $f : [\circ,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع $L^1$-کاراتئودری بوده که

الف) $f(t,\circ) = \circ$ تقریباً همه‌جا $t\in[\circ,1]$،

ب) $F(t,\xi)\geq\circ$ برای هر

$$(t,\xi)\in([\circ,\tfrac{1}{4}]\cup[\tfrac{3}{4},1])\times\mathbb{R}^{+}.$$

همچنین فرض کنیم دنباله حقیقی $\{a_n\}$ و دنباله $\{b_n\}$ در $[\circ,1]$ با شرط $\lim_{n\to\infty} b_n = \circ$ موجود باشد، به‌طوری‌که برای تقریباً همه‌جا $t\in[\circ,1]$ و هر $x\in[\circ,b_1]$ داشته باشیم

$$|f(t,x)| \leq k,$$

برای بعضی ثابت‌های حقیقی $k > \circ$، و

ج) $a_n^{2} < \frac{1}{8+4\sqrt{2}} b_n^{2}$،

د)

$$A_{\circ} := \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{\circ}^{1}\max_{|\xi|\leq b_n} F(t,\xi)dt - \int_{1/4}^{3/4} F(t,a_n)dt}{\frac{1}{2}b_n^{2} - (4+2\sqrt{2})a_n^{2}} < \frac{B^{\circ}}{4+2\sqrt{2}}.$$

آنگاه مسئله (۳) یک دنباله از جواب‌های ضعیف نامنفی نابدیهی $\{u_n\}$ در $C^1([\circ,1])$ می‌پذیرد که

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{C^1([\circ,1])} = \circ.$$

---
[1] Sobolev

**برهان:** هدف استفاده از قضیه ۱ برای مسئله (۳) می‌باشد. فرض کنیم تابع $a:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ یک تابع ناصعودی باشد که دارای ضابطه زیر است:

$$a(s):=\begin{cases}1+\frac{1}{\sqrt{1+s}}, & s\in[0,1),\\ \frac{2+\sqrt{2}}{16}(s-2)^2+\frac{14+7\sqrt{2}}{16}, & s\in[1,2),\\ \frac{14+7\sqrt{2}}{16}, & s\in[2,+\infty).\end{cases}$$

قرار می‌دهیم برای $s\geq 0$،

$$A(s):=\int_0^s a(t)\,dt.$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$1\leq a(s)\leq\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

و بنابراین

$$s\leq A(s)\leq\frac{2+\sqrt{2}}{2}s$$

برای هر $s\geq 0$. از طرفی چون تابع $s\mapsto sa(s^2)$ صعودی است، تابع $s\mapsto A(s^2)$ در بازه $[0,+\infty)$ محدب است. برای $t\in[0,1]$ تقریباً همه‌جا، تابع $f$ را به‌صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$g(t,x):=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,0),\\ f(t,x), & x\in[0,b_1),\\ f(t,b_1), & x\in[2,+\infty)\end{cases}$$

که $b_1$ از دنباله $\{b_n\}$ گرفته شده است. تابع $g$، $L^1$-کاراتئودری است و اگر $G:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع اولیه آن باشد یعنی:

$$G(t,x):=\int_0^{\xi} g(t,x)\,dx$$

به‌ازای $(t,\xi)\in[0,1]\times\mathbb{R}$، در این‌صورت $G$ و $g$ در شرایط این قضیه صدق می‌کنند. حال مسئله کمکی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}-(a(|u'|^2u'))'=\lambda g(t,u), & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=0.\end{cases}$$

فرض کنیم توابع $\Phi,\Psi:X\to\mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف شوند:

$$\Phi(u):=\frac{1}{2}\int_0^1 A(|u'|^2)dt,$$

$$\Psi(u):=\int_0^1 G(t,u(t))dt,$$

و قرار دهیم $I_\lambda(u):=\Phi(u)-\lambda\Psi(u)$ برای هر $u\in X$. با توجه به اینکه $s\leq A(s)\leq\frac{2+\sqrt{2}}{2}s$، تابع $\Phi$ روی $X$ خوش‌تعریف، پیوسته و اجباری است. به‌علاوه با توجه به محدب بودن تابع $s\mapsto A(s^2)$ در بازه $[0,+\infty)$، تابع $\Phi$ محدب بوده و در نتیجه نیم‌پیوسته ضعیف پایینی است. تابع $\Psi$ نیز خوش‌تعریف و نیم‌پیوسته ضعیف بالایی است. به‌علاوه، توابع $\Phi$ و $\Psi$ به‌طور پیوسته دارای مشتق‌گاتو[1] می‌باشند و

$$\Phi'(u)(v):=\int_0^1 a(|u'(t)|^2)u'(t)v'(t)dt$$

و

$$\Psi'(u)(v):=\int_0^1 g(t,u(t))v(t)dt$$

برای هر $u,v\in X$. مانند حکم قضیه، $\lambda$ را ثابت در نظر می‌گیریم. ابتدا نشان می‌دهیم $\lambda<1/\delta$. تعریف

[1] Gateaux

می‌کنیم $r_n := \frac{1}{2} b_n^2$. در نتیجه برای هر $u \in X$ با شرط $\Phi(u) < r_n$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 \le \Phi(u) < r_n.$$

بنابراین

$$\|u\|_\infty \le b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

برای هر $u \in X$ به‌طوری‌که $\Phi(u) < r_n$. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم

$$\phi(r_n) \le \inf_{\Phi(u)<r_n} \frac{\int_0^1 \max_{|\xi|\le b_n} G(t,\xi)\,dt - \int_0^1 G(t,u(t))\,dt}{\frac{1}{2} b_n^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 A(|u'(t)|^2)\,dt}.$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$w_n(t) := \begin{cases} 4a_n t, & t \in [0,1/4], \\ a_n, & t \in [1/4,3/4), \\ 4a_n(1-t), & t \in [3/4,1], \end{cases}$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$. به‌وضوح $w_n \in X$ و

$$\Phi(w_n) \le \frac{2+\sqrt{2}}{4}\|w_n\|^2 = (4+2\sqrt{2})a_n^2.$$

با توجه به فرض (پ)، داریم $\Phi(w_n) < r_n$. به‌علاوه، با توجه به فرض (ب) می‌توان نوشت:

$$\Psi(w_n) \ge \int_{1/4}^{3/4} G(t,a_n)\,dt,$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$. در نتیجه

$$\phi(r_n) \le \frac{\int_0^1 \max_{|\xi|\le b_n} G(t,\xi)\,dt - \int_{1/4}^{3/4} G(t,a_n)\,dt}{\frac{1}{2} b_n^2 - (4+2\sqrt{2})a_n^2},$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$. حال شرط (د) را به‌یاد آوریم، پس

$$0 \le \delta \le \lim_{n\to\infty} \varphi(r_n) \le A_0 < +\infty.$$

اگر از نامساوی بالا استفاده کنیم و از آنجا که $\lambda < 1/A_0$، پس $\lambda < 1/\delta$. حال ادعا می‌کنیم تابعک $I_\lambda$، مینیمم موضعی در صفر ندارد. چون $1/\lambda < B^0/(4+2\sqrt{2})$، یک دنباله $\{\eta_n\}$ از اعداد مثبت و $\tau > 0$ هست به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$ و

$$\frac{1}{\lambda} < \tau < \frac{1}{4+2\sqrt{2}} \frac{\int_{1/4}^{3/4} G(t,\eta_n)\,dt}{\eta_n^2},$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ به اندازه کافی بزرگ. برای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض کنیم $s_n \in X$ به‌صورت زیر تعریف شود:

$$s_n(t) := \begin{cases} 4\eta_n t, & t \in [0,1/4], \\ \eta_n, & t \in [1/4,3/4), \\ 4\eta_n(1-t), & t \in [3/4,1]. \end{cases}$$

چون $\lambda\tau > 1$، پس داریم:

$$\begin{aligned} I_\lambda(s_n) &= \Phi(s_n) - \lambda\Psi(s_n) \\ &\le (4+2\sqrt{2})\eta_n^2 - \lambda\int_{1/4}^{3/4} G(t,\eta_n)\,dt \\ &< (4+2\sqrt{2})\eta_n^2(1-\lambda\tau) < 0 \\ &= \Phi(0) - \lambda\Psi(0), \end{aligned}$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ به‌اندازه کافی بزرگ. با توجه به اینکه $\|s_n\|$ به صفر همگراست، تابعک $I_\lambda$ در صفر مینیمم موضعی ندارد. همچنین صفر تنها مینیمم مطلق تابع $\Phi$ است. درنتیجه $I_\lambda$ مینیمم موضعی در تنها مینیمم تابع $\Phi$ ندارد. پس با استفاده از قضیه ۱، یک دنباله $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی تابعک $I_\lambda$ وجود دارد که به‌طور ضعیف به صفر همگراست. در نظر داشته باشیم که نشان‌دهی $X$ در $C^0([0,1])$ فشرده است، پس این نقاط بحرانی به‌طور قوی به صفر همگراست و $\lim_{n\to\infty}\|u_n\| = 0$. حال ثابت می‌کنیم نقاط بحرانی تابع انرژی نامنفی هستند. فرض خلف گیریم که $u$ یک نقطه بحرانی تابع $I_\lambda$ بوده و تعریف می‌کنیم:

$$A:=\{t\in[0,1]:u(t)<0\},$$

که ناتهی و دارای اندازه لبگ مثبت باشد. فرض کنیم $v=\min\{0,u\}$. به‌وضوح $v\in X$ یک نقطه بحرانی تابع $I_\lambda$ بوده و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}0&=\Phi'(u)(v)-\lambda\Psi'(u)(v)\\&=\int_0^1 a(|u'(t)|^2)u'(t)v'(t)dt\\&\quad-\lambda\int_0^1 g(t,u(t))v(t)dt\\&=\int_A a(|u'(t)|^2)|u'(t)|^2dt\\&\geq\int_A |u'(t)|^2dt,\end{aligned}$$

زیرا $a(s)\geq 1$ برای هر $s\geq 0$ و $g(t,s)=0$ برای هر $t\in[0,1]$ تقریباً همه‌جا و برای $s<0$. بنابراین، از آنجا که $u|_A\in W_0^{1,2}(A)$، پس $u\equiv 0$ روی $A$، که تناقض است. بنابراین اگر $u_n$ یک نقطه بحرانی از تابع $I_\lambda$ باشد، آنگاه یک جواب ضعیف از مسئله کمکی بیان شده در بالا بوده و نامنفی است. همچنین با توجه به $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_\infty=0$، برای $n$ به قدر کافی بزرگ و برای هر $t\in[0,1]$خواهیم داشت $u_n(t)\leq b_1$. بنابراین $\|u_n\|_\infty\leq b_1$، برای $n$ به قدر کافی بزرگ. از طرف دیگر با توجه به فرض‌های ما در مورد تابع $f$ در $[0,1]\times[0,b_1]$ و با توجه به تعریف تابع $g$، خواهیم داشت: $|g(t,x)|\leq k$، برای تقریباً همه‌جا $t\in[0,1]$ و $x\in\mathbb{R}$. حال با توجه به $\|u_n\|_\infty\leq b_1$ و $|g(t,x)|\leq k$، اعداد ثابت $\beta\in(0,1)$ و $\kappa>0$ وجود دارند، به‌طوری‌که برای $n\in\mathbb{N}$، $u_n\in X\bigcap C^{1,\beta}([0,1])$ و $\|u_n\|_{C^{1,\beta}([0,1])}\leq\kappa$.

اکنون ثابت می‌کنیم $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{C^{1,\beta}([0,1])}=0$. در واقع فرض کنیم (فرض خلف) زیردنباله $\{u_{n_h}\}$ وجود دارد، به‌طوری‌که $\lim_{h\to\infty}\|u_{n_h}\|_{C^{1,\beta}([0,1])}>0$. پس با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_\infty>0$ نتیجه می‌گیریم $\lim_{h\to\infty}\|u'_{n_h}\|_\infty>0$. طبق قضیه آرزولا-اسکولی یک زیردنباله که باز هم با $\{u_{n_h}\}$ نشان می‌دهیم، وجود دارد به‌طوری‌که $\{u'_{n_h}\}$ به‌طور یکنواخت به صفر همگراست که با $\lim_{h\to\infty}\|u'_{n_h}\|_\infty>0$ در تناقض است. نتیجه می‌گیریم برای $n$ به قدر کافی بزرگ، $\|u_n\|_{C^1([0,1])}\leq 1$ و اثبات تمام است. □

حال می‌خواهیم چند نتیجه از قضیه ۲ را بیان نماییم. ابتدا قرار می‌دهیم:

$$B^\circ:=\limsup_{\xi\to 0^+}\frac{\int_0^1\max_{|t|\leq\xi}F(t,\xi)\,dt}{\xi^2}.$$

نتیجه زیر را خواهیم داشت.

**نتیجه ۱.** فرض نماییم تابع $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع $L^1$-کاراتئودری باشد به‌طوری‌که فرض‌های (الف) و (ب) از **قضیه ۲** برقرار باشد. همچنین فرض کنیم (ح) دو عدد حقیقی مثبت $\sigma,k$ وجود دارد به‌طوری که برای تقریباً همه جا $t\in[0,1]$ و برای $x\in[0,\sigma]$ داشته باشیم: $|f(t,x)|\leq k$.آنگاه

(خ) $A_0<\frac{1}{8+4\sqrt{2}}B^\circ$.

آنگاه برای هر $\lambda\in\left(\frac{4+2\sqrt{2}}{B^\circ},\frac{1}{2A_0}\right)$، مسئله (۳) دارای یک دنباله از جواب‌های ضعیف نابدیهی و نامنفی

مانند $\{u_n\}$ است، به‌طوری‌که $\{u_n\}\subset C^1([0,1])$ و $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{C^1([0,1])}=0$.

**نتیجه ۲.** فرض کنیم تابع $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، یک تابع $L^1$-کاراتئودری باشد به‌طوری‌که فرض‌های (الف) و (ب) از **قضیه ۲** و فرض (ح) از

**نتیجه ۱** برقرار باشد. همچنین فرض کنیم:

$$A_0<\frac{1}{2},\qquad B^0>4+2\sqrt{2}.$$

آنگاه مسئله:

$$\begin{cases} -\left(\left(1+\dfrac{u'^2}{\sqrt{1+u'^4}}\right)u'\right)'=f(t,u) \quad in \quad (0,1),\\ u(0)=0=u(1),\end{cases}$$

دارای یک دنباله از جواب‌های ضعیف نابدیهی و نامنفی مانند $\{u_n\}$ است، به‌طوری‌که $\{u_n\}\subset C^1([0,1])$ و $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{C^1([0,1])}=0$.

**نتیجه ۳.** وقتی $f$ تابعی است نامنفی، شرط (خ) از نتیجه ۱ به‌صورت زیر خواهد بود:

(خ۱)

$$A_0' := \liminf_{\xi\to 0^+}\frac{\int_0^1 F(t,\xi)\,dt}{\xi^2}<\frac{1}{8+4\sqrt{2}}B^0.$$

در واقع شرط (خ۱) نتیجه می‌دهد برای هر $\lambda\in\left(\frac{4+2\sqrt{2}}{B^0},\frac{1}{2A_0'}\right)$، مسئله (۳) دارای یک دنباله از جواب‌های ضعیف نابدیهی و نامنفی مانند $\{u_n\}$ است، به‌طوری‌که $\{u_n\}\subset C^1([0,1])$ و $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{C^1([0,1])}=0$.

## سپاس‌گزاری

بدین‌وسیله از داور محترم مقاله که با پیشنهادهای ارزنده خود موجب بهبود کیفیت مقاله شدند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

## References

[1] R. Bartnik, L. Simon, Spacelike hypersurfaces with prescribed boundary values and mean curvature, Comm. Math. Phys., 87 (1982) 131-152.

[2] W.M. Ni, J. Serrin, Non-existence theorems for quasilinear partial differential equations, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., 8 (1985) 171-185.

[3] W.M. Ni, J. Serrin, Existence and non-existence theorems for ground states of quasilinear partial differential equations, The anomalous case, Atti Convegni Lincei, 77 (1986) 231-257.

[4] W.M. Ni, J. Serrin, Non-existence theorems for singular solutions of quasilinear partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 39 (1986) 379-399.

[5] F. Obersnel, P. Omari, Positive solutions of the Dirichlet problem for the prescribed mean curvature equation, J. Differ. Eq., 249 (2010) 1674-1725.

[6] B. Ricceri, A general variational principle and some of its applications, J. Comput. Appl. Math., 113 (2000) 401-410.

[7] G.A. Afrouzi, A. Hadjian, Infinitely many solutions for a class of Dirichlet quasilinear elliptic systems, J. Math. Anal. Appl., 393 (2012) 265-272.

[8] G.A. Afrouzi, A. Hadjian, S. Heidarkhani, Infinitely many solutions for a mixed doubly eigenvalue boundary value problem, Mediterr. J. Math., 10 (2013) 1317-1331.

[9] G. Molica Bisci, Variational problems on the sphere, in: Recent Trends in Nonlinear Partial Differential Equations, Dedicated to Patrizia Pucci on the occasion of her 60th birthday, Contemporary Mathematics, 595 (eds. J. Serrin, E. Mitidieri and V. Radulescu) (American Mathematical Society, 2013) 273-291.

[10] R. Adams, Sobolev Spaces, Academic press. New York, 1995.