تقارن‌های معادله انتقال حرارت دوبُعدی، کاهش مرتبه و جواب‌های دقیق

سعیده رشیدی[۱]، سیدرضا حجازی[۲،*]

۱. دانشجوی دکتری، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود
۲. استادیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/ ۱۸

Symmetries of two-dimensional heat transfer equation, order reduction and exact solutions

Saeede Rashidi[1], S. Reza Hejazi[2,*]

1. PhD Candidate, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology
2. Assistant Professor, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology

Received: 9/17/2017 Accepted: 1/8/2018

چکیده: در این مقاله با بهره‌گیری از دسته‌ای از عملگرهای دیفرانسیلی به نام تقارن‌های معادلات دیفرانسیل به تحلیل جواب‌های دقیق معادله انتقال حرارت دوبُعدی می‌پردازیم. بدین صورت که ابتدا معادله کلی انتقال حرارت دوبُعدی را معرفی کرده سپس در حالت‌های خاص با به‌دست آوردن عملگرهای دیفرانسیلی مذکور در هر مرحله جواب‌های دقیق معادلات به‌دست آمده را خواهیم یافت. شایان ذکر است این روش قابل تعمیم به هر نوع دستگاه از معادلات دیفرانسیل است.

کلمات کلیدی: تقارن‌های معادله دیفرانسیل، کاهش مرتبه معادله، جواب‌های دقیق، معادله انتقال حرارت دوبُعدی، گروه ناورداها.

Abstract: In this paper, we analyze the exact solutions of two-dimensional heat transfer equation by using a class of differential operators, called symmetries of differential equations. Firstly, we introduce the general form of the two-dimensional heat transfer equation. Then, we will find the exact solutions of the equations by using the mentioned differential operators in some special cases. It is noteworthy that this method could be extended to all kinds of system of differential equations.

Keywords: Symmetries of differential equations, order reduction of the equation, exact solutions, two-dimensional heat transfer equation, group-invariant.

۱ مقدمه

همان‌گونه که می‌دانیم معادلات دیفرانسیل به‌خصوص معادلات جزئی[۱] (PDEs) کاربرد بسیار گسترده و وسیعی در تمامی علوم مهندسی، فیزیک، شیمی، ریاضی و غیره دارد [۱]. مهمترین مسئله‌ای که در اولین برخورد با یک PDE رخ می‌نماید به‌دست آوردن جواب‌های آن است، به‌ویژه زمانی که با یک PDE غیرخطی مواجه می‌شویم. این معادلات برخلاف معادلات دیفرانسیل

[1] Partial differential equation

*Corresponding author: ra.hejazi@gmail.com

*نویسنده مسئول

معمولی[1] (ODEs) در حالت های کلی روشی برای حل کردن ندارند. خوشایند آن است که بتوانیم جواب‌های دقیقی برای این دسته از معادلات پیدا کنیم. روش‌های مختلفی برای حصول این مهم وجود دارد. ما در این تحقیق به ارائه یکی از پرقدرت‌ترین آنها خواهیم پرداخت. این روش بدون درنظرگرفتن نوع PDE، خطی یا غیرخطی بودن دستگاه معادلات و یا تک‌معادلات قابل اجرا خواهد بود [۲–۴].

نظریه گروه تبدیلات لی نقش مهمی در آنالیز معادلات دیفرانسیل بازی می‌کند. تقارن یکی از ویژگی‌های مهم در طبیعت است و تمامی معادلاتی که قادر به توصیف پدیده‌های فیزیکی، بیولوژیکی و یا شیمیایی هستند، ویژگی‌های تقارن را نیز دارا می‌باشند. در حقیقت یک پدیده فیزیکی ممکن است نه‌تنها به زمان در لحظه، بلکه به زمان‌های پیشین نیز بستگی داشته باشد که در این صورت این پدیده‌ها را می‌توان با نظریه مشتق و انتگرال از مرتبه کسری مدل‌سازی کرد. نظریه معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری[2] (FDEs) اخیراً یک موضوع در حال توسعه در بررسی‌ها و تحقیقات ریاضی در هر دو زمینه نظریه و کاربردها می‌باشد.

در طول چهار دهه گذشته چندین روش عددی و تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری ارائه شده است. روش تقارن گروه لی که در این مقاله برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی ارائه شده است قابل استفاده برای حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری نیز می‌باشد [۵–۹].

فرض کنیم $u(x,y,t)$ یک تابع دیفرانسیل‌پذیر بر حسب متغیرهایش باشد. صورت کلی معادلات انتقال حرارت دوبُعدی به شکل

$$u_t = (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y \qquad (۱)$$

می‌باشد. هدف این مقاله تحلیل جواب‌های معادله (۱) در برخی از حالات خاص به‌ازای f و g های مختلف است.

ساختار اصلی مقاله به این شکل است که در بخش دوم تقارن‌های معادلات دیفرانسیل را مطالعه کرده و روش به‌دست آوردن آنها را بررسی می‌کنیم. در بخش سوم نشان خواهیم داد که چگونه به کمک این عملگرهای دیفرانسیلی می‌توان یک معادله دیفرانسیل را به معادله‌ای ساده‌تر تبدیل کرد که به کمک جواب‌های دسته دوم، جواب‌های معادلات اولیه را بیابیم. در نهایت روش توصیف شده در این بخش را روی حالت‌های خاص از معادله (۱) عملی می‌کنیم.

۲ تقارن‌های معادلات دیفرانسیل

این فصل را ابتدا با تعریفی از معادلات دیفرانسیل آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱. یک دستگاه m–معادله دیفرانسیل جزئی با p متغیر مستقل و q متغیر وابسته از مرتبه k عبارتی به شکل $\Delta\left(x,u,\ldots,\partial^k u\right)$ است به‌طوری‌که $x=\left(x^۱,x^۲,\cdots,x^p\right)$ و $u=\left(u^۱,u^۲,\ldots,u^q\right)$ به‌ترتیب متغیرهای مستقل و وابسته و $\partial^k u$ نمایش دهنده کلیه مشتقات u نسبت به متغیرهایش تا مرتبه $k-$ ام است [۱۰].

[1] Ordinary differential equation
[2] Fractional order differential equation

تعریف ۲. یک تبدیل یک پارامتری از مولدهای بی‌نهایت کوچک برای معادله (۱) به‌صورت

$$\begin{aligned} &x \to x+\xi(x,y,t,u),\\ &y \to y+\eta(x,y,t,u),\\ &t \to t+\tau(x,y,t,u),\\ &u \to u+\varphi(x,y,t,u) \end{aligned} \qquad (۲)$$

است که در آن $\varepsilon \ll 1$ یک پارامتر تغییر بسیار کوچک است. یک عملگر دیفرانسیلی متناظر با مجموعه تبدیلات فوق به‌صورت

$$\begin{aligned} X &= \xi(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial y}\\ &+\tau(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial t}+\varphi(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial u}\\ &+\mu(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial f}+\nu(x,t,y,u)\frac{\partial}{\partial g}. \end{aligned} \qquad (۳)$$

می باشد. این عملگر دیفرانسیلی را یک تقارن (تبدیلی که هر جواب معادله را به جوابی دیگر می‌نگارد) می‌گوییم هرگاه امتداد مرتبه دوم عملگر (۳) که آن را با $X^{(۲)}$ نشان می‌دهیم، معادله را صفر کند. به عنوان مثال امتداد مرتبه دوم عملگر (۳) به مشتق‌های درگیر در معادله (۱) به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} X^{(۲)} &= \xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\tau\frac{\partial}{\partial t}+\varphi\frac{\partial}{\partial u}\\ &+\mu\frac{\partial}{\partial f}+\nu\frac{\partial}{\partial g}+\varphi^t\frac{\partial}{\partial u^t}\\ &+\varphi^x\frac{\partial}{\partial u^x}+\varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u^{xx}}+\varphi^y\frac{\partial}{\partial u^y}\\ &+\varphi^{yy}\frac{\partial}{\partial u^{yy}}+\mu^u\frac{\partial}{\partial f^u}+\nu^u\frac{\partial}{\partial g^u}. \end{aligned} \qquad (۴)$$

برای اینکه X تقارن معادله (۱) باشد لازم است که

$$X^{(۲)}F\big|_{F=۰}=۰,\ \mu^t=\mu^x=\mu^y=۰, \qquad (۵)$$

روی جواب‌های معادله (۱) صفر شود. با بازنویسی معادله (۱) داریم

$$\begin{aligned} F &= u_t-f_u u_x^{۲}-f(u)u_{xx}\\ &-g_u(u)u_y^{۲}-g(u)u_{yy}=۰. \end{aligned} \qquad (۶)$$

اگر عملگر دیفرانسیلی (۳) تقارن معادله (۱) باشد، شرط (۵) برای آن به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} &\varphi^t-۲f_u u_x\varphi^x-f(u)\varphi^{xx}-۲g_u u_y\varphi^y\\ &-g(u)\varphi^{yy}-\mu^u u_x{}^{۲}-\nu^u u_y{}^{۲}=۰. \end{aligned} \qquad (۷)$$

ضرایب در معادله (۷) از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \varphi^x &= D_x(\varphi)-u_x D_x(\xi)-u_t D_x(\tau)-u_y D_x(\eta),\\ \varphi^y &= D_y(\varphi)-u_x D_y(\xi)-u_t D_y(\tau)-u_y D_y(\eta),\\ \varphi^t &= D_t(\varphi)-u_x D_t(\xi)-u_t D_t(\tau)-u_y D_t(\eta),\\ \varphi^{xx} &= D_x(\varphi^x)-u_{xx}D_x(\xi)-u_{tx}D_x(\tau)-u_{ty}D_x(\eta)\\ &= D_x^{۲}(\varphi)-۲u_{xx}D_x(\xi)-u_x D_x^{۲}(\xi)-۲u_{tx}D_x(\tau)\\ &\quad -u_t D_x^{۲}(\tau)-۲u_{yx}D_x(\eta)-u_y D_x^{۲}(\eta),\\ \varphi^{yy} &= D_y(\varphi^y)-u_{xy}D_y(\xi)\\ &\quad -u_{tx}D_y(\tau)-u_{ty}D_y(\eta)\\ &= D_y^{۲}(\varphi)-۲u_{xy}D_y(\xi)-u_x D_y^{۲}(\xi)\\ &\quad -۲u_{ty}D_y(\tau)-u_t D_y^{۲}(\tau)\\ &\quad -۲u_{yy}D_y(\eta)-u_y D_y^{۲}(\eta),\\ \mu^u &= \tilde{D}(\mu)-f_t\tilde{D}_u(\tau)-f_y\tilde{D}_u(\eta)\\ &\quad -f_x\tilde{D}_u(\xi)-f_u\tilde{D}_u(\varphi)-f_{ut}\tilde{D}_u(\varphi^t)\\ &\quad -f_{ux}\tilde{D}_u(\varphi^x)-f_{uy}\tilde{D}_u(\varphi^y),\\ \nu^u &= \tilde{D}(\nu)-g_t\tilde{D}_u(\tau)-g_y\tilde{D}_u(\eta)\\ &\quad -g_x\tilde{D}_u(\xi)-g_u\tilde{D}_u(\varphi)-g_{ut}\tilde{D}_u(\varphi^t)\\ &\quad -g_{ux}\tilde{D}_u(\varphi^x)-g_{uy}\tilde{D}_u(\varphi^y). \end{aligned} \qquad (۸)$$

در معادلات فوق داریم:

$$\begin{aligned} D_t &= \frac{\partial}{\partial t}+u_t\frac{\partial}{\partial u}+u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t}+u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_x},\\ D_x &= \frac{\partial}{\partial x}+u_x\frac{\partial}{\partial u}+u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_t}+u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x},\\ D_y &= \frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial u}+u_{ty}\frac{\partial}{\partial u_t}+u_{xy}\frac{\partial}{\partial u_x},\\ \tilde{D}_u &= \frac{\partial}{\partial u}+f_u\frac{\partial}{\partial f}+g_u\frac{\partial}{\partial g}, \end{aligned}$$

که به عملگر مشتقات کامل معروف می‌باشند. حال با جایگذاری این عملگرها در (۸) و حل دستگاه معادلات به‌دست آمده نسبت به $u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, \ldots$، ضرایب عملگر (۳) را خواهیم یافت. این موضوع در بخش‌های آینده براساس ضرایب تابعی موجود در معادله (۱) بهتر دیده خواهد شد [۱۱, ۱۲].

۳ کاهش مرتبه یک معادله دیفرانسیل جزئی

در این قسمت قصد داریم تقارن‌های معادله انتقال حرارت دوبُعدی را برای حالت خاص از توابع f و g یافته و با استفاده از تقارن‌ها، جواب‌هایی از معادله را بیابیم.

با در نظر گرفتن $f = g = ۱$ معادله (۱) به معادله زیر تبدیل خواهد شد

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}. \qquad (۹)$$

حال به کمک الگوریتم توصیف شده در بالا تقارن‌های معادله (۹) عبارت خواهند بود از

$$\begin{aligned} &X_۱ = \partial_x \ , \quad X_۲ = \partial_y \ , \quad X_۳ = \partial_t , \\ &X_۴ = u\partial_u , \quad X_۵ = y\partial_x - x\partial_y , \\ &X_۶ = \frac{x}{۲}\partial_x + \frac{y}{۲}\partial_y + t\partial_t , \\ &X_۷ = t\partial_x - \frac{۱}{۲}xu\partial_u \ , \\ &X_۸ = t\partial_y + \frac{۱}{۲}yu\partial_u , \\ &X_۹ = \frac{۱}{۲}xt\partial_x + \frac{۱}{۲}yt\partial_y + \frac{۱}{۲}t^۲\partial_t \\ &\qquad - \frac{۱}{۸}\left(x^۲ + y^۲ + ۴t\right)u\partial_u . \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

حال می‌توان با استفاده از تقارن‌های یافت شده، معادله (۹) را به معادله‌های ساده‌تر با متغیرهای کمتری کاهش داد. این کاهش مرتبه در یافتن جواب برای معادله مفید به نظر می‌رسد. می‌دانیم هریک از این عملگرها یک مولد برای مجموعه تقارنی هستند که توسط معادله پذیرفته می‌شود.

برای مولد $X_۱$ داریم:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = ۰ \Rightarrow I = I\left(y,t\right) \Rightarrow u = v\left(r,q\right) \qquad (۱۱)$$

که $r = t$ و $q = y$ توابع ناورداهای دیفرانسیلی هستند. با جایگذاری (۱۱) در معادله (۹) به معادله زیر خواهیم رسید

$$v_r - v_{qq} = ۰. \qquad (۱۲)$$

با تکرار همین روند در خصوص مولدهای $X_۲, X_۳, X_۵, X_۶$ معادله (۹) به‌ترتیب به معادله‌های زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} &X_۲: \quad v_r - v_{qq} = ۰, \\ &X_۳: \quad v_{rr} - v_{qq} = ۰, \\ &X_۵: \quad ۴qv_{qq} - v_r + ۴v_q = ۰, \\ &X_۶: \quad rv_r + qv_q + ۲v_{rr} + ۲v_{qq} = ۰. \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

لازم به ذکر است برای به‌دست آوردن معادله‌ای قابل حل می توان از ترکیب خطی هریک از مولدهای (۱۰) با یکدیگر نیز بهره گرفت. تمامی معادلات (۱۳)، PDE هایی (۱+۱)-بُعدی هستند و به منظور رسیدن به جواب‌های آنها می‌توان از روش‌های عددی و یا سری‌های توانی استفاده کرد.

یافتن جواب دقیق برای یک معادله کاهش یافته

قابل ذکر است که هر معادله دیفرانسیل کاهش یافته را می‌توان به کمک روش تقارن‌ها مجدد کاهش داد، به شکلی که به یک ODE تبدیل شود. به عنوان مثال معادله کاهش یافته توسط $X_۵$ مولدهای زیر را به عنوان مجموعه تقارن جدید می‌پذیرد:

$$\begin{aligned}&\Upsilon_1=\partial_r\ ,\Upsilon_2=r\partial_r+q\partial_q\,,\Upsilon_3=v\,\partial_v\,,\\&\Upsilon_4=\frac{1}{2}r^2\partial_r+rq\partial_q-\frac{1}{8}(q+4r)v\,\partial_v\,.\end{aligned}\qquad (۱۴)$$

مجددا با یافتن توابع ناوردا برای این مولدها می‌توان معادله را کاهش داد. به عنوان مثال توابع ناوردا برای مولد Υ_2 عبارت خواهند بود از $r=e^h$ و $q=se^h$ به‌طوری‌که $s=q/r$. با فرض $v(r,q)=f(s)$ معادله جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$4sf_{ss}-s\,f_s-4f_s=0. \qquad (۱۵)$$

معادله (۱۵) به دو روش قابل حل است. با حل مستقیم این معادله خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&f(s)=C_1+(s+4)e^{(-1/4s)}C_2,\\&C_1,C_2=const.\end{aligned}\qquad (۱۶)$$

در نتیجه

$$v(r,q)=C_1+\left(qe^{-\ln(r)}+4\right)e^{-\frac{1}{4}qe^{-\ln(r)}}+C_2.$$

با جایگذاری توابع ناوردای به‌دست آمده یک جواب دقیق برای معادله (۹) به شکل زیر خواهیم یافت:

$$\begin{aligned}&u(x,y,t)=C_1\\&+\left[\left(x^2+y^2\right)e^{-\ln\left(e^h\right)}+4\right]e^{-\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)e^{-\ln\left(e^h\right)}}+C_2.\end{aligned}$$

روش دیگر موجود برای یافتن جواب روش سری‌های توانی است. فرض کنیم که

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\theta^n\ \ ,\ \ \theta=s=\frac{q}{r} \qquad (۱۷)$$

یک جواب برای معادله (۹) باشد. بنابراین

$$\begin{aligned}&f'=\sum_{n=0}^{\infty}nC_n\theta^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)C_{n+1}\theta^n+C_1.\\&f''=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)C_{n+1}\theta^{n-1}\\&\quad=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)C_{n+2}\theta^n+2C_2.\end{aligned}\qquad (۱۸)$$

با جایگزینی (۱۷) و (۱۸) در معادله (۱۵) و اعمال متغیرهای ناوردای یافته شده جواب زیر را خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&u(x,y,t)=v(r,q)\\&=v\left(t,x^2+y^2\right)=f(s)=f\left(\frac{q}{r}\right)\\&=C_0+C_1\left(\frac{x^2+y^2}{t}\right)+\frac{4C_1+\left(\frac{x^2+y^2}{t}\right)C_1}{8\left(\frac{x^2+y^2}{t}\right)}\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\frac{x^2+y^2}{t}+4(n+1)}{4\frac{x^2+y^2}{t}(n+1)(n+2)}C_{n+1}\left(\frac{x^2+y^2}{t}\right)^{n+2}.\end{aligned}$$

۴ حالت‌های خاص از معادله انتقال حرارت دوبُعدی

در قسمت پیشین تقارن‌ها و جواب‌های معادله دوبُعدی انتقال حرارت در حالت خاص $f=g=1$ بررسی شد. در این بخش قصد داریم بررسی فوق را برای حالات خاص دیگری انجام دهیم.

حالت $f=u^2$ و $g=0$

با اعمال این تغییرات معادله (۱) به معادله زیر تبدیل خواهد شد:

$$u_t=2uu_x^2+u^2u_{xx}. \qquad (۱۹)$$

تقارن‌های معادله فوق به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}&X_1=\partial_x\ \ ,\qquad X_2=\partial_t\ \ ,\\&X_3=x\,\partial_x+u\partial_u,X_4=\frac{x}{2}\partial_x+t\,\partial_t.\end{aligned}\qquad (۲۰)$$

حال با کاهش مرتبه معادله (۱۹) با استفاده از تقارن‌های (۲۰) به معادلات زیر خواهیم رسید:

$$
\begin{aligned}
&X_1: && v_r = 0,\\
&X_2: && \begin{cases} v = 0 \\ v v_{rr} + 2v_r^2 = 0 \end{cases},\\
&X_3: && e^q\left(-2v^3 + v_r\right) = 0,\\
&X_4: && e^q v_r - 2v - 4e^q v^2 = 0.
\end{aligned}
$$

حل معادلات فوق نیز با روش‌های ذکر شده امکان پذیر خواهد بود. برای مثال با حل دومین معادله به جواب‌های زیر برای ثوابت دلخواه a و b خواهیم رسید:

$$v = \pm\sqrt{2ar + 2b}\ ,\ \ v = 0. \qquad (۲۱)$$

در رابطه (۲۱) داریم $r = x$. با این جایگذاری جوابی از معادله (۱۹) به‌صورت‌های زیر خواهیم یافت:

$$u\left(x, y, t\right) = \pm\sqrt{2ax + 2b},\ a, b = const.$$

حالت $f = 1/u$ و $g = 0$

با اعمال این تغییرات معادله (۱) به معادله زیر تبدیل خواهد شد:

$$u_t = -\frac{1}{u^2}u_x^2 + \frac{1}{u}u_{xx}. \qquad (۲۲)$$

تقارن‌های معادله فوق به‌صورت زیر هستند:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \partial_x\ , \quad X_2 = \partial_t\ ,\\
&X_3 = \frac{x}{2}\partial_x + t\partial_t,\\
&X_4 = -\frac{x}{2}\partial_x + u\partial_u.
\end{aligned}
$$

حال با کاهش مرتبه معادله (۲۲) با استفاده از تقارن‌های فوق به معادلات زیر خواهیم رسید:

$$
\begin{aligned}
&X_1:\ v_r = 0,\\
&X_2:\ v v_{qq} + v_q^2 = 0,\\
&X_3:\ 4v r^2 v_{rr} - 4r^2 v_r^2 - v^2 v_r + 6r v v_r = 0,\\
&X_4:\ v_r = 2.
\end{aligned}
\qquad (۲۳)
$$

تمامی معادله‌های بالا با روش‌های ذکر شده در بخش سوم قابل حل می‌باشند. برای نمونه با روش انتگرال‌گیری مستقیم از دومین و چهارمین معادله فوق به‌ترتیب جواب‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
&v = \pm\sqrt{2aq + 2b}\ ,\ \ v = 0,\\
&v = 2r + a, \qquad a = b = const.
\end{aligned}
\qquad (۲۴)
$$

با جایگذاری r و q در روابط دو جواب دقیق زیر برای u به‌دست می آید:

$$
\begin{aligned}
&u\left(x, y, t\right) = \pm\sqrt{2at + 2b}\ ,\\
&a, b = const.
\end{aligned}
\qquad (۲۵)
$$

$$u\left(x, y, t\right) = 2x + a,\ \ a = const. \qquad (۲۶)$$

حالت $f = u$ و $g = 0$

در این وضعیت معادله (۱) به معادله

$$u_t = u_x^2 + u_{xx}u, \qquad (۲۷)$$

تبدیل می شود که همان معادله برگر در مکانیک سیالات است. تقارن‌های این معادله عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \partial_x\ , \quad X_2 = \partial_t\ ,\\
&X_3 = \frac{x}{2}\partial_x + t\partial_t,\\
&X_4 = \frac{x}{2}\partial_x + u\partial_u.
\end{aligned}
\qquad (۲۸)
$$

حال با کاهش مرتبه معادله (۲۷) با استفاده از تقارن‌های (۲۸) به معادلات زیر خواهیم رسید:

$$
\begin{aligned}
&X_1:\ v_r = 0,\\
&X_2:\ v_{qq}v + v_q^2 = 0,\\
&X_3:\ 4r^2 v_r^2 + 4r^2 v_{rr} + 6r v_r - v_r = 0,\\
&X_4:\ e^q\left(-6v^2 + v_r\right) = 0.
\end{aligned}
$$

حل معادلات فوق نیز با روش‌های ذکر شده امکان پذیر خواهد بود. برای مثال با حل دومین معادله به

جواب‌های زیر برای ثوابت دلخواه a و b خواهیم رسید:

$$v = \pm\sqrt{۲ar + ۲b}\ , v = ۰,\ \ a,b = const.$$
$$v = \frac{۱}{-۶r + a},\ \ a = const. \qquad (۲۹)$$

در رابطه (۲۹) داریم $r = x$. با این جایگذاری جوابی از معادله (۲۷) به‌صورت‌های زیر خواهیم یافت:

$$u(x,y,t) = \pm\sqrt{۲ax + ۲b},\ \ a,b = const$$
$$u(x,y,t) = \frac{۱}{-۶x + a},\quad a = const.$$

بحث و نتیجه‌گیری

در مقاله‌ای که از پیش رو گذشت به ارائه الگوریتمی مبتنی بر یک سری عملگرهای دیفرانسیلی تحت عنوان تقارن معادله پرداختیم که جواب‌های یک معادله دیفرانسیل را به سایر جواب‌های آن می‌برد. سپس این روش را برای حالت کلی معادله انتقال حرارت دوبُعدی به‌کار برده و در برخی حالت‌های خاص معادله به کمک تبدیلات منتج شده از عملگرهای دیفرانسیلی مذکور دسته‌ای از جواب‌های دقیق آنها را به‌دست آوردیم. این روش یک روش نظام‌مند و قابل تعمیم به هر دستگاه معادلات دیفرانسیل، خواه خطی یا غیرخطی می‌باشد و حُسن آن در این است که جواب‌های دقیق ارائه می‌دهد. شایان ذکر است که استفاده از برخی نرم افزارهای محاسباتی مثل Maple و Mathematica می‌تواند در به‌کارگیری این الگوریتم مفید واقع شود.

References

[1] G.J. Pert, Introductory fluid mechanics for physicists and mathematicians, John Wiley & Sons, 2013.

[2] G.W. Bluman, A.F. Cheviakov, S.C. Anco, Applications of symmetry methods to partial differential equations, Springer, 2010.

[3] N.H. Ibragimov, CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations, CRC press, 1995.

[4] N.K. Ibragimov, N.K. Ibragimov, Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations, Wiley New York, 1999.

[5] R.K. Gazizov, A.A. Kasatkin, S.Y. Lukashchuk, Symmetry properties of fractional diffusion equations, Physica Scripta, 2009 (2009) 014016.

[6] R.K. Gazizov, A.A. Kasatkin, S.Y. Lukashchuk, Fractional differential equations: change of variables and nonlocal symmetries, Ufa Math. J., 4 (2012) 54-67.

[7] Q .Huang, R. Zhdanov, Symmetries and exact solutions of the time fractional Harry-Dym equation with Riemann–Liouville derivative, Physica A: Stat. Mech. Appl., 409 (2014) 110-118.

[8] K.S. Miller, B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, Wiley, New York, 1993.

[9] I. Podlubny, Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, Elsevier, 1988.

[10] P.J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, Springer Science & Business Media, 2000.

[11] N.H. Ibragimov, Infinitesimal method in the theory of invariants of algebraic and differential equations, Not. South African Math. Soc., 29 (1997) 61-70.

[12] N.H. Ibragimov, Archives of ALGA, ALGA Publications Bleking Institute of technology, Karlskrona, Sweden, 2004.