Complex and Nonlinear Systems
Vol. 1, No. 2, Winter 2018, pp. 53-73

سیستم‌های مختلط و غیرخطی
سال ۱، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۶، صص ۵۳ تا ۷۳

چند نتیجه نقطه انطباقی برای نگاشت‌های JS–انقباضی تعمیم‌یافته در فضاهای G–متری اصلاح شده مرتب

وحید پروانه[۱،*] حسن حسین زاده[۲]

۱. استادیار، گروه ریاضی، واحد گیلانغرب، دانشگاه آزاد اسلامی
۲. استادیار، گروه ریاضی، واحد اردبیل، دانشگاه آزاد اسلامی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۵/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۱۸

Some coincidence point results for generalized JS-contractive mappings in ordered modified G-metric space

Vahid Parvaneh[1,*], Hasan Hosseinzadeh[2]

1. Assistant Professor, Department of Mathematics, Gilan-E-Gharb Branch, Islamic Azad University
2. Assistant Professor, Department of Mathematics, Ardabil Branch, Islamic Azad University

Received: 8/12/2017 Accepted: 1/8/2018

چکیده: تعمیم‌های زیادی از اصل انقباض باناخ در فضاهای متری تعمیم‌یافته وجود دارد. هدف این پژوهش، ارائه ساختار فضاهای متری تعمیم‌یافته اصلاح شده (فضاهای G–متری اصلاح شده) به‌عنوان تعمیمی مناسب از فضای G–متری می باشد. سپس، به بیان و اثبات چندین نتیجه نقطه انطباقی برای شش نگاشت با شرط JS–انقباضی تعمیم‌یافته در چارچوب این رده جدید از فضاها پرداخته می‌شود که تعمیم اصل انقباض باناخ خواهد بود. یک مثال و یک کاربرد برای نشان دادن کارایی نتایج به‌دست آمده نیز ارائه خواهند شد.

کلمات کلیدی: نقطه انطباقی، نگاشت انقباضی تعمیم‌یافته، فضای متری تعمیم‌یافته، نگاشت صعودی ضعیف جزئی.

Abstract: There are many generalizations of the Banach contraction principle in generalized metric spaces. The aim of this paper is to present the structure of modified G-metric space as a new generalization of G-metric spaces. Also, some coincidence point results for six mappings satisfying generalized JS-contractive condition in the framework of ordered modified G-metric spaces are presented which are generalizations of Banach contraction principle. An example and an application are also provided to support our results.

Keywords: coincidence point, generalized contraction mapping, generalized metric space, partially weakly increasing mappings.

۱ مقدمه

فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد و f خودنگاشتی روی X. اگر برای عنصری مانند x در X داشته باشیم $x = fx$، آنگاه x یک نقطه ثابت نگاشت f نامیده می‌شود. مجموعه تمام نقاط ثابت نگاشت f با $F(f)$ نمایش داده می‌شود. اگر $F(f)=\{z\}$ و برای هر $x_\circ$ در فضای متری کامل X، دنباله $x_{n+1}=f(x_n)=f^n(x_\circ)$ به نقطه z همگرا باشد، آنگاه f یک عملگر پیکارد[۱] نامیده می‌شود.

[1] Picard

[*]Corresponding author: vahid.parvaneh@kiau.ac.ir

[*]نویسنده مسئول

فرض کنید f و g خودنگاشت روی مجموعه ناتهی X باشند. اگر برای نقطه x در X داشته باشیم $x = fx = gx$:، آنگاه x یک نقطه ثابت مشترک نگاشت‌های f و g نامیده می‌شود. سسا[1] [۱] مفهوم جابجایی ضعیف را در مورد دو نگاشت برای به‌دست آوردن نقاط ثابت مشترک تعریف کرد. جانک[2] این ایده را نخست به نگاشت‌های سازگار [۲] و سپس به نگاشت‌های سازگار ضعیف [۳] تعمیم داد.

مفهوم فضای b–متری تعمیم‌یافته را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. تابع $\tilde{d}: X\times X \to R^+$ یک p–متری است اگر نگاشت پیوسته صعودی اکید $\Omega:[\circ,\infty)\to[\circ,\infty)$ با شرط $\Omega^{-1}(x)\le x\le \Omega(x)$ و $\Omega^{-1}(\circ)\le \circ \le \Omega(\circ)$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x,y,z\in X$ شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $\tilde{d}(x,y)=\circ$ اگر و تنها اگر $x=y$

۲. $\tilde{d}(x,y)=\tilde{d}(y,x)$،

۳. $\tilde{d}(x,z)\le \Omega\left(\tilde{d}(x,y)+\tilde{d}(y,z)\right)$.

در این صورت، زوج $(X,\tilde{d})$ یک فضای p–متری یا یک فضای b–متری توسعه‌یافته نامیده می‌شود.

هر b–متری [۴, ۵] یک p–متری است که در آن $\Omega(x)=sx$ و هر متر معمولی یک p–متری است، که در آن $\Omega(x)=x$.

گزاره ۱. فرض کنید (X,d) یک فضای متری و

$$\tilde{d}(x,y)=\xi\left(d(x,y)\right)$$

که در آن $\xi:[\circ,\infty)\to[\circ,\infty)$ یک تابع صعودی اکید با شرط $x\le\xi(x)$ و $\xi(\circ)=\circ$ باشد. آنگاه $\tilde{d}$ یک p–متری با $\Omega(t)=\xi(t)$ می باشد.

گزاره بالا مثال زیر را می‌سازد.

مثال ۱. فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد و $\tilde{d}(x,y)=e^{d(x,y)}\sec^{-1}\left(e^{d(x,y)}\right)$. آنگاه، $\tilde{d}$ یک p–متری با $\Omega(t)=e^{t}\sec^{-1}\left(e^{t}\right)$ می‌باشد.

مفهوم فضای متری تعمیم‌یافته، یا فضای G–متری، توسط مصطفی[3] و سیمز[4] معرفی شد. در حقیقت، آنها مفهوم متر را طوری تعمیم دادند که برای هر سه نقطه از یک مجموعه یک عدد حقیقی اختصاص می‌یابد. بر اساس مفهوم فضای متری تعمیم‌یافته، نویسندگان زیادی از جمله [۶-۱۴] برخی قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های انقباضی مختلف به‌دست آوردند.

تعریف ۲. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $G: X\times X\times X\to R^+$ تابعی باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(G1) $G(x,y,z)=\circ$ اگر $x=y=z$،

(G2) برای هر $x,y\in X$ با شرط $x\ne y$، $\circ<G(x,x,y)$،

(G3) برای هر $x,y,z\in X$ با شرط $y\ne z$، $G(x,x,y)\le G(x,y,z)$،

[1] Sessa
[2] Jungck
[3] Mustafa
[4] Sims

$$G(x,y,z)=G(x,z,y)=G(y,z,x)=\cdots \qquad \text{(G4)}$$

(G5) برای هر $x,y,z,a\in X$،

$$G(x,y,z)\le G(x,a,a)+G(a,y,z).$$

آنگاه، تابع G یک G–متری روی مجموعه X و زوج (X,G) یک فضای G–متری نامیده می‌شود.

آقاجانی[1] و دیگران در [۱۵] با الهام از مفهوم b–متری [۴] مفهوم فضای b–متری تعمیم‌یافته را معرفی کردند. تعریف زیر تعریف فضای G–متری اصلاح‌شده است که تعمیم مناسبی از مفاهیم فضای G–متری و فضای G_b– متری می‌باشد.

تعریف ۳. فرض کنید X مجموعه ای ناتهی و $\Omega:[0,\infty)\to[0,\infty)$ تابعی پیوسته و اکیداً صعودی باشد که برای $x>0$، $\Omega^{-1}(x)\le x\le\Omega(x)$ و $\Omega^{-1}(0)=0=\Omega(0)$. فرض کنید نگاشت $\tilde{G}:X\times X\times X\to\mathbb{R}^+$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\tilde{G}(x,y,z)=0$ اگر $x=y=z$،

۲. برای هر $x,y\in X$ با شرط $x\ne y$، $0<\tilde{G}(x,x,y)$.

۳. برای هر $x,y,z\in X$ با شرط $y\ne z$، $\tilde{G}(x,x,y)\le\tilde{G}(x,y,z)$.

۴. $\tilde{G}(x,y,z)=\tilde{G}(p\{x,y,z\})$ که در آن p یک جایگشت از x,y,z می‌باشد.

۵. برای هر $x,y,z\in X$،

$$G(x,y,z)\le\Omega\left[\tilde{G}(x,a,a)+\tilde{G}(a,y,z)\right].$$

در این صورت، $\tilde{G}$ یک G–متری اصلاح‌شده و زوج $(X,\tilde{G})$ یک فضای G–متری اصلاح‌شده یا یک فضای $\tilde{G}$متری نامیده می‌شود.

هر فضای G–متری یک فضای $\tilde{G}$ متری با $\Omega(t)=t$ و هر فضای G_b–متری یک فضای $\tilde{G}$ متری با $\Omega(t)=st$ می‌باشد.

گزاره ۲. فرض کنید (X,G) یک فضای G_b–متری با ضریب $s\ge 1$ و $\tilde{G}(x,y,z)=\xi(G(x,y,z))$ که در آن $\xi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ یک تابع صعودی است که برای هر $x>0$، $x\le\xi(x)$ و $\xi(0)=0$. نشان می‌دهیم که $\tilde{G}$ یک $\tilde{G}$–متری با $\Omega(t)=\xi(st)$ می‌باشد.

برای هر $x,y,z,a\in X$،

$$\begin{aligned}\tilde{G}(x,y,z)&=\xi(G(x,y,z))\\&\le\xi(sG(x,a,a)+sG(a,y,z))\\&\le\xi(s\xi(G(x,a,a))+s\xi(G(a,y,z)))\\&=\xi(s\tilde{G}(x,a,a)+s\tilde{G}(a,y,z))\\&=\Omega(\tilde{G}(x,a,a)+\tilde{G}(a,y,z)).\end{aligned}$$

لذا $\tilde{G}$ یک G–متری اصلاح‌شده با $\Omega(t)=\xi(st)$ می‌باشد.

گزاره بالا مثال‌های زیر را القا می‌کند:

مثال ۲. فرض کنید (X,G) یک فضای G_b–متری با ضریب $s\ge 1$ باشد. آنگاه

۱. $\tilde{G}(x,y,z)=e^{G(x,y,z)}\sec^{-1}\left(e^{G(x,y,z)}\right)$ یک $\tilde{G}$ متری با تابع $\Omega(t)=e^{st}\sec^{-1}\left(e^{st}\right)$می‌باشد.

۲. $\tilde{G}(x,y,z)=[G(x,y,z)+1]\sec^{-1}([G(x,y,z)+1])$

---

[1] Aghajani

یک $\tilde{G}$ متری با تابع $\Omega(t)=[st+1]\sec^{-1}([st+1])$ می‌باشد.

۳. $\tilde{G}(x,y,z)=e^{G(x,y,z)}\tan^{-1}\left(e^{G(x,y,z)}-1\right)$ یک $\tilde{G}$متری با تابع $\Omega(t)=e^{st}\tan^{-1}\left(e^{st}-1\right)$ می‌باشد.

۴. $\tilde{G}(x,y,z)=G(x,y,z)\cosh(G(x,y,z))$ یک $\tilde{G}$ متری با تابع $\Omega(t)=st\cosh(st)$ می‌باشد.

۵. $\tilde{G}(x,y,z)=e^{G(x,y,z)}\ln(1+G(x,y,z))$ یک $\tilde{G}$ متری با تابع $\Omega(t)=e^{st}\ln(1+st)$ می‌باشد.

۶. $\tilde{G}(x,y,z)=G(x,y,z)+\ln(1+G(x,y,z))$ یک $\tilde{G}$ متری با تابع $\Omega(t)=st+\ln(1+st)$ می‌باشد.

تعریف ۴. یک $\tilde{G}$ متری متقارن نامیده می‌شود اگر برای هر $x,y\in X$،

$$\tilde{G}(x,y,y)=\tilde{G}(y,x,x).$$

گزاره ۳. فرض کنید X یک فضای $\tilde{G}$ متری باشد. آنگاه برای هر $x,y,z,a\in X$ نتیجه می‌شود که:

۱. اگر $\tilde{G}(x,y,z)=0$ آنگاه $x=y=z$.

۲. $\tilde{G}(x,y,z)\le\Omega\left(\tilde{G}(x,x,y)+\tilde{G}(x,x,z)\right)$.

۳. $\tilde{G}(x,y,y)\le\Omega\left(2\tilde{G}(x,x,y)\right)$.

۴. $\tilde{G}(x,y,z)\le\Omega\left(\tilde{G}(x,a,z)+\tilde{G}(a,y,z)\right)$.

یاد آوری می‌شود که تابع f فوق‌العاده جمعی است اگر برای هر $x,y\in D(f)$،

$$f(x+y)\ge f(x)+f(y).$$

تعریف ۵. فرض کنید X یک فضای $\tilde{G}$ متری با تابع فوق العاده جمعی Ω باشد. اگر برای هر $x,y\in X$، $\tilde{d}_{\tilde{G}}(x,y)=\tilde{G}(x,y,y)+\tilde{G}(x,x,y)$، آنگاه $\tilde{d}_{\tilde{G}}$ یک p–متری $\tilde{d}$ روی X خواهد بود که p–متری مربوط به $\tilde{G}$ نام دارد.

تعریف ۶. فرض کنید X یک فضای $\tilde{G}$ متری باشد. دنباله $\{x_n\}$ در X :

- دنباله ای $\tilde{G}$ کوشی است اگر برای هر $\varepsilon>0$ عدد صحیح و مثبتی مانند n_0 موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $m,n,l\ge n_0$ داشته باشیم:

$$\tilde{G}(x_n,x_m,x_l)<\varepsilon.$$

- دنباله‌ای $\tilde{G}$ همگرا به نقطه‌ای مانند $x\in X$ است اگر برای هر $\varepsilon>0$ عدد صحیح و مثبتی مانند n_0 موجود باشد به‌طوری که برای هر $m,n\ge n_0$ داشته باشیم

$$\tilde{G}(x_n,x_m,x)<\varepsilon.$$

- فضای $\tilde{G}$ متری X کامل نامیده می‌شود، اگر هر دنباله $\tilde{G}$ کوشی در آن $\tilde{G}$ همگرا در X باشد.

گزاره ۴. فرض کنید X یک فضای $\tilde{G}$ متری باشد. آنگاه، شرایط زیر هم‌ارزند:

۱. دنباله $\{x_n\}$ یک دنباله $\tilde{G}$ کوشی است.

۲. برای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $n_0\in\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $m,n\ge n_0$،

$$\tilde{G}(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon.$$

گزاره ۵. فرض کنید X یک فضای $\tilde{G}$ متری باشد. گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. دنباله $\{x_n\}$ دنباله‌ای $\tilde{G}$ همگرا به نقطه x است.

۲. $\tilde{G}(x_n, x_n, x) \to 0$.

۳. $\tilde{G}(x_n, x, x) \to 0$.

در حالت کلی، یک تابع G_b–متری $G(x,y,z)$ برای $s > 1$ و بنابراین یک تابع G متری اصلاح شده $\tilde{G}(x,y,z)$ با تابع نابدیهی Ω برای هر سه متغیر هم‌زمان پیوسته نیست [۱۱].

لم ساده زیر را در مورد دنباله‌های $\tilde{G}$ همگرا به کار خوهیم برد.

لم ۱. فرض کنید $(X, \tilde{G})$ یک فضای $\tilde{G}$ متری باشد.

۱. فرض کنید $\{x_n\}$، $\{y_n\}$ و $\{z_n\}$ به‌ترتیب $\tilde{G}$همگرا به x، y و z باشند. آنگاه،

$$\begin{aligned}(\Omega^{-1})^{3}\left[\tilde{G}(x,y,z)\right] &\le \liminf_{n\to\infty}\tilde{G}(x_n,y_n,z_n)\\ &\le \limsup_{n\to\infty}\tilde{G}(x_n,y_n,z_n)\\ &\le \Omega^{3}\left[\tilde{G}(x,y,z)\right].\end{aligned}$$

۲. فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به‌ترتیب $\tilde{G}$ همگرا به x و y و باشند. آنگاه،

$$\begin{aligned}(\Omega^{-1})^{2}\left[\tilde{G}(x,y,\alpha)\right] &\le \liminf_{n\to\infty}\tilde{G}(x_n,y_n,\alpha)\\ &\le \limsup_{n\to\infty}\tilde{G}(x_n,y_n,\alpha)\\ &\le \Omega^{2}\left[\tilde{G}(x,y,\alpha)\right].\end{aligned}$$

۳. اگر $\{x_n\}$ $\tilde{G}$همگرا به x باشد، آنگاه،

$$\begin{aligned}(\Omega^{-1})\left[\tilde{G}(x,\alpha,\beta)\right] &\le \liminf_{n\to\infty}\tilde{G}(x_n,\alpha,\beta)\\ &\le \limsup_{n\to\infty}\tilde{G}(x_n,\alpha,\beta)\\ &\le \Omega\left[\tilde{G}(x,\alpha,\beta)\right].\end{aligned}$$

در حالت خاص، اگر $x = y = z$، آنگاه،

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{G}(x_n,y_n,z_n) = 0.$$

برهان. ۱. با استفاده از نامساوی مستطیلی در یک فضای $\tilde{G}$ متری مشاهده می‌شود که

$$\begin{aligned}\tilde{G}(x,y,z) \le \Omega\Big[&\tilde{G}(x,x_n,x_n)\\ &+\Omega\Big[\tilde{G}(y,y_n,y_n)\\ &+\Omega\left[\tilde{G}(z,z_n,z_n)+\tilde{G}(x_n,y_n,z_n)\right]\Big]\Big]\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\tilde{G}(x_n,y_n,z_n) \le \Omega\Big[&\tilde{G}(x_n,x,x)\\ &+\Omega\Big[G(y_n,y,y)\\ &+\Omega\left[G(z_n,z,z)+G(x,y,z)\right]\Big]\Big].\end{aligned}$$

در نامساوی اول با حد پایین گرفتن زمانی که $n \to \infty$ و در نامساوی دوم با حد بالا گرفتن زمانی که $n \to \infty$ نتیجه مورد انتظار حاصل خواهد شد.

۲. با استفاده از نامساوی مستطیلی می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\tilde{G}(x,y,\alpha) \le \Omega\Big[&\tilde{G}(x,x_n,x_n)\\ &+\Omega\left[\tilde{G}(y,y_n,y_n)+\tilde{G}(x_n,y_n,\alpha)\right]\Big]\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\tilde{G}(x_n,y_n,\alpha) \le \Omega\Big[&\tilde{G}(x_n,x,x)\\ &+\Omega\left[G(y_n,y,y)+G(x,y,\alpha)\right]\Big].\end{aligned}$$

۳. به‌طور مشابه،

$$\tilde{G}(x,\alpha,\beta) \le \Omega\left[\tilde{G}(x,x_n,x_n)+\tilde{G}(x_n,\alpha,\beta)\right]$$

و

$$\tilde{G}(x_n,\alpha,\beta) \le \Omega\left[\tilde{G}(x_n,x,x)+G(x,\alpha,\beta)\right].$$

تعریف ۷. فضای G–متری مرتب جزئی $(X,\prec,G)$ دارای خاصیت .s.l.c گفته می‌شود اگر برای هر دنباله صعودی $\{x_n\}$ در X که $x_n \to x$ نتیجه شود که $x \prec x_n$.

تعریف ۸. ([۱۶، ۱۷]) فرض کنید f و g دو خودنگاشت روی مجموعه مرتب جزئی X باشند. زوج (f,g):

(i) صعودی ضعیف گفته می‌شود اگر برای هر $x \in X$، $fx \prec gfx$ و $gx \prec fgx$.

(ii) صعودی ضعیف جزئی گفته می‌شود اگر برای هر $x \in X$، $fx \prec gfx$.

تعریف ۹. فرض کنید $(X,\prec)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد و $f,g,h : X \to X$ نگاشت‌هایی باشند به‌طوری‌که $fX \subseteq hX$ و $gX \subseteq hX$. زوج (f,g)

(a) صعودی ضعیف نسبت به نگاشت h گفته می‌شود اگر برای هر $y \in h^{-1}(fx)$، $fx \prec gy$ و برای هر $y \in h^{-1}(gx)$، $gx \prec fy$ ([۱۸]).

(b) صعودی ضعیف جزئی نسبت به نگاشت h نامیده می‌شود اگر برای هر $y \in h^{-1}(fx)$، $fx \prec gy$ ([۱۹]).

تعریف ۱۰. ([۸، ۲۲]) فرض کنید X یک فضای G متری باشد و $f,g : X \to X$. زوج (f,g) سازگار نامیده می‌شود اگر $\lim_{n\to\infty} G(fgx_n, fgx_n, gfx_n) = 0$، که در آن $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X است به‌طوری که برای یک $t \in X$،

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = t.$$

جللی[1] و دیگران [۲۰] رده توابع Θ متشکل از تمام توابع $\theta : (0,\infty) \to (1,\infty)$ دارای شرایط زیر را معرفی کردند:

۱. θ صعودی باشد،
۲. برای هر دنباله $\{t_n\} \subseteq (0,\infty)$، $\lim_{n\to\infty} \theta(t_n) = 1$ اگر و تنها اگر $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.
۳. اعداد حقیقی $r \in (0,1)$ و $\ell \in (0,\infty]$ موجود باشند به‌طوری که $\lim_{t\to 0^+} \frac{\theta(t)-1}{t^r} = \ell$،
۴. θ پیوسته باشد.

آنها همچنین قضیه زیر را ارائه کردند:

قضیه ۱. ([۲۰] تبصره ۲.۱) فرض کنید (X,d) یک فضای متری کامل و $T : X \to X$ نگاشتی دلخواه باشد. فرض کنید $\theta \in \Theta$ و $k \in (0,1)$ موجود باشند به‌طوری که

$$x,y \in X, \qquad d(Tx,Ty) \neq 0 \;\Rightarrow\; \theta(d(Tx,Ty)) \le \theta(d(x,y))^k.$$

آنگاه، T یک نقطه ثابت یکتا دارد.

از این به بعد، با Ψ مجموعه توابع

---
[1] Jleli

$\theta:[0,\infty)\to[1,\infty)$ دارای شرایط زیر را نشان می‌دهیم:

θ_1. θ تابعی اکیداً صعودی و پیوسته باشد،

θ_2. برای هر دنباله $\{t_n\}\subseteq(0,\infty)$،
$\lim_{n\to\infty}\theta(t_n)=1$ اگر و تنها اگر $\lim_{n\to\infty}t_n=0$.

تذکر ۱. واضح است که $f(t)=e^t$ در Θ نیست، اما عضوی از Θ می‌باشد. مثال‌های دیگر عبارتند از
$f(t)=\cosh t$، $f(t)=e^{te^t}$،
$f(t)=\frac{2+2\ln(1+t)}{2+\ln(1+t)}$، $f(t)=1+\ln(1+t)$،
$f(t)=\frac{2\cosh t}{1+\cosh t}$ و $f(t)=\frac{2e^{te^t}}{1+e^{te^t}}$.

در این پژوهش، با انگیزه از مطالعه انجام شده در [۱۰] چند نتیجه نقطه انطباق برای شش نگاشت با شرط JS–انقباضی در چارچوب فضاهای G متری اصلاح‌شده به‌دست می‌آوریم.

۲ نتایج اصلی

فرض کنید $(X,\prec,\tilde{G})$ یک فضای $\tilde{G}$ متری مرتب با تابع Ω باشد و $f,g,h,R,S,T:X\to X$ شش خودنگاشت باشند. در سراسر این مقاله، مگر خلاف آن بیان شود، برای هر $x,y,z\in X$، فرض کنید

$$M(x,y,z)=\max\Big\{\tilde{G}(Tx,Ry,Sz),\frac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}(Tx,fx,fx)\right],\frac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}(Ry,gy,gy)\right],\frac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}(Sz,hz,hz)\right],\frac{1}{3}\Big(\tilde{G}(Tx,Tx,fx)+\tilde{G}(Ry,Ry,gy)+\frac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}(Sz,Sz,hz)\right]\Big)\Big\}.$$

فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد و $f,g,h,R,S,T:X\to X$ شش نگاشت باشند به‌طوری‌که $f(X)\subseteq R(X)$، $g(X)\subseteq S(X)$ و $h(X)\subseteq T(X)$. فرض کنید x_0 نقطه‌ای دلخواه از X باشد. همچنین، فرض کنید $x_1\in X$ چنان باشد که $fx_0=Rx_1$، عنصر $x_2\in X$ چنان باشد که $gx_1=Sx_2$ و $x_3\in X$ چنان انتخاب شده باشد که $hx_2=Tx_3$. با ادامه این روند، دنباله $\{z_n\}$ تعریف‌شده با

$$z_{3n+1}=Rx_{3n+1}=fx_{3n},\quad z_{3n+2}=Sx_{3n+2}=gx_{3n+1},\quad z_{3n+3}=Tx_{3n+3}=hx_{3n+2}$$

را می‌سازیم. دنباله $\{z_n\}$ در X یک دنباله تکرار جانک با مقدار اولیه x_0 نامیده می شود.

قضیه ۲. فرض کنید $(X,\prec,\tilde{G})$ یک فضای $\tilde{G}$ متری مرتب کامل باشد. فرض کنید $f,g,h,R,S,T:X\to X$ شش نگاشت باشند به‌طوری‌که $f(X)\subseteq R(X)$، $g(X)\subseteq S(X)$ و $h(X)\subseteq T(X)$. فرض کنید برای هر سه عنصر مقایسه‌پذیر $Tx,Ry,Sz\in X$،

$$\psi\left(\Omega^{3}\left[\tilde{G}(fx,gy,hz)\right]\right)\le\psi(M(x,y,z))^{k},\quad (1)$$

که در آن $\psi\in\Psi$ و $k\in[0,1)$. فرض کنید S، R،

h، g، f و T پیوسته باشند، زوج‌های (g,R)، (f,T) و (h,S) سازگار باشند و زوج‌های (g,h)، (f,g) و (h,f) به‌ترتیب صعودی ضعیف جزئی نسبت به نگاشت‌های R، S و T باشند. آنگاه، زوج‌های (g,R)، (f,T) و (h,S) یک نقطه انطباقی مانند z در X دارند. به‌علاوه، اگر Rz، Sz و Tz مقایسه‌پذیر باشند، آنگاه، z یک نقطه انطباقی تمام نگاشت‌ها خواهد بود.

برهان. فرض کنید $\{z_n\}$ یک دنباله تکرار جانک با مقدار اولیه x_0 در X باشد. چون $x_1 \in R^{-1}(fx_0)$، $x_2 \in S^{-1}(gx_1)$ و $x_3 \in T^{-1}(hx_2)$ و زوج‌های (f,g) (g,h)، و (h,f) نسبت به نگاشت‌های R، S و T صعودی ضعیف جزئی هستند، بنابراین، برای هر $n \geq 0$،

$$Rx_{3n+1} Sx_{3n+2} Tx_{3n+3}.$$

در سه مرحله به‌صورت زیر اثبات را کامل خواهیم کرد:

مرحله I. نشان می‌دهیم که

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{G}(z_k, z_{k+1}, z_{k+2}) = 0.$$

فرض کنید $\tilde{G}_k = \tilde{G}(z_k, z_{k+1}, z_{k+2})$. اگر برای یک اندیس k_0، $\tilde{G}_{k_0} = 0$، آنگاه $z_{k_0} = z_{k_0+1} = z_{k_0+2}$. در حالتی که $k_0 = 3n$، آنگاه $z_{3n} = z_{3n+1} = z_{3n+2}$ نتیجه می‌دهد که $z_{3n+1} = z_{3n+2} = z_{3n+3}$.

در واقع، اگر $z_{3n} = z_{3n+1} = z_{3n+2} \neq z_{3n+3}$، آنگاه،

$$\begin{aligned}
&\psi\left(\tilde{G}(z_{3n+1}, z_{3n+2}, z_{3n+3})\right) \\
&= \psi\left(\tilde{G}(fx_{3n}, gx_{3n+1}, hx_{3n+2})\right) \\
&\leq \psi(M(x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}))^k,
\end{aligned}$$

که در آن،

$$\begin{aligned}
&M(x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}) \\
&= \max\Big\{\tilde{G}(Tx_{3n}, Rx_{3n+1}, Sx_{3n+2}), \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}(Tx_{3n}, fx_{3n}, fx_{3n})\right], \\
&\quad \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}(Rx_{3n+1}, gx_{3n+1}, gx_{3n+1})\right], \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}(Sx_{3n+2}, hx_{3n+2}, hx_{3n+2})\right], \\
&\quad \tfrac{1}{3}\left(\tilde{G}(Tx_{3n}, Tx_{3n}, fx_{3n}) + \tilde{G}(Rx_{3n+1}, Rx_{3n+1}, gx_{3n+1}) + \tilde{G}(Sx_{3n+2}, Sx_{3n+2}, hx_{3n+2})\right)\Big\} \\
&= \max\Big\{\tilde{G}(z_{3n}, z_{3n+1}, z_{3n+2}), \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}(z_{3n}, z_{3n+1}, z_{3n+1})\right], \\
&\quad \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}(z_{3n+1}, z_{3n+2}, z_{3n+2})\right], \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}(z_{3n+2}, z_{3n+3}, z_{3n+3})\right] \\
&\quad \frac{\tilde{G}(z_{3n}, z_{3n}, z_{3n+1}) + \tilde{G}(z_{3n+1}, z_{3n+1}, z_{3n+2}) + \tilde{G}(z_{3n+2}, z_{3n+2}, z_{3n+3})}{3}\Big\} \\
&= \max\left\{0, 0, 0, \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}(z_{3n+2}, z_{3n+3}, z_{3n+3})\right], \frac{0 + 0 + \tilde{G}(z_{3n+2}, z_{3n+2}, z_{3n+3})}{3}\right\} \\
&\leq \max\left\{\tilde{G}(z_{3n+3}, z_{3n+2}, z_{3n+2}), \frac{\tilde{G}(z_{3n+3}, z_{3n+2}, z_{3n+3})}{3}\right\} \\
&\leq \max\left\{\tilde{G}(z_{3n+1}, z_{3n+2}, z_{3n+3}), \frac{\tilde{G}(z_{3n+1}, z_{3n+2}, z_{3n+3})}{3}\right\}.
\end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned}&\psi\left(\tilde{G}\left(z_{۳n+۱},z_{۳n+۲},z_{۳n+۳}\right)\right)\\ &\le \psi(\tilde{G}\left(z_{۳n+۱},z_{۳n+۲},z_{۳n+۳}\right))^{k}\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد که $z_{۳n+۱}=z_{۳n+۲}=z_{۳n+۳}$ که یک تناقض است. به‌طور مشابه، اگر $k_{۰}=۳n+۱$، یا اگر $k_{۰}=۳n+۲$، آنگاه $z_k=z_{k+۱}=z_{k+۲}$ نتیجه می‌دهد که $z_{k+۱}=z_{k+۲}=z_{k+۳}$. در نتیجه، دنباله $\{z_k\}$ برای هر $k\ge k_{۰}$ دنباله‌ای ثابت خواهد بود و لذا،

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{G}\left(z_k,z_{k+۱},z_{k+۲}\right)=۰.$$

فرض کنید برای هر k،

$$\tilde{G}_k=\tilde{G}\left(z_k,z_{k+۱},z_{k+۲}\right)>۰. \qquad (۲)$$

سه حالت زیر را خواهیم داشت:

حالت ۱. برای هر k، $z_k\ne z_{k+۱}$.

حالت ۲. برای هر k، $z_k\ne z_{k+۲}$.

حالت ۳. برای هر k، $z_k\ne z_{k+۱}\ne z_{k+۲}$.

ادعا می‌کنیم که نامساوی زیر همواره برقرار است.

$$\begin{aligned}&\tilde{G}\left(z_{k+۱},z_{k+۲},z_{k+۳}\right)\\ &\le \tilde{G}\left(z_k,z_{k+۱},z_{k+۲}\right) \qquad (۳)\\ &=M\left(x_k,x_{k+۱},x_{k+۲}\right).\end{aligned}$$

فرض کنید $k=۳n$ و برای یک اندیس $n\ge ۰$، $\tilde{G}\left(z_{۳n+۱},z_{۳n+۲},z_{۳n+۳}\right)\ge \tilde{G}\left(z_{۳n},z_{۳n+۱},z_{۳n+۲}\right)>۰$ و $z_{۳n}\ne z_{۳n+۱}$. آنگاه، چون $Tx_{۳n}Rx_{۳n+۱}Sx_{۳n+۲}$، با استفاده از نامساوی (۱) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}&\psi\left(\tilde{G}\left(z_{۳n+۱},z_{۳n+۲},z_{۳n+۳}\right)\right)\\ &=\psi\left(\tilde{G}\left(fx_{۳n},gx_{۳n+۱},hx_{۳n+۲}\right)\right) \qquad (۴)\\ &\le \psi(M\left(x_{۳n},x_{۳n+۱},x_{۳n+۲}\right))^{k},\end{aligned}$$

که در آن،

$$\begin{aligned}&M\left(x_{۳n},x_{۳n+۱},x_{۳n+۲}\right)\\
&=\max\Big\{\tilde{G}\left(Tx_{۳n},Rx_{۳n+۱},Sx_{۳n+۲}\right),\tfrac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}\left(Tx_{۳n},fx_{۳n},fx_{۳n}\right)\right]\\
&\qquad,\tfrac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}\left(Rx_{۳n+۱},gx_{۳n+۱},gx_{۳n+۱}\right)\right],\tfrac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}\left(Sx_{۳n+۲},hx_{۳n+۲},hx_{۳n+۲}\right)\right],\\
&\qquad\tfrac{۱}{۳}\left(\tilde{G}\left(Tx_{۳n},Tx_{۳n},fx_{۳n}\right)+\tilde{G}\left(Rx_{۳n+۱},Rx_{۳n+۱},gx_{۳n+۱}\right)+\tfrac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}\left(Sx_{۳n+۲},Sx_{۳n+۲},hx_{۳n+۲}\right)\right]\right)\Big\}\\
&=\max\Big\{\tilde{G}\left(z_{۳n},z_{۳n+۱},z_{۳n+۲}\right),\tfrac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}\left(z_{۳n},z_{۳n+۱},z_{۳n+۱}\right)\right]\\
&\qquad,\tfrac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}\left(z_{۳n+۱},z_{۳n+۲},z_{۳n+۲}\right)\right],\tfrac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}\left(z_{۳n+۲},z_{۳n+۳},z_{۳n+۳}\right)\right],\\
&\qquad\tfrac{۱}{۳}\left(\tilde{G}\left(z_{۳n},z_{۳n},z_{۳n+۱}\right)+\tilde{G}\left(z_{۳n+۱},z_{۳n+۱},z_{۳n+۲}\right)+\tfrac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}\left(z_{۳n+۲},z_{۳n+۲},z_{۳n+۳}\right)\right]\right)\Big\}\\
&\le \max\Big\{\tilde{G}\left(z_{۳n},z_{۳n+۱},z_{۳n+۲}\right),\tilde{G}\left(z_{۳n+۱},z_{۳n+۲},z_{۳n+۳}\right),\\
&\qquad\frac{\tilde{G}\left(z_{۳n},z_{۳n+۱},z_{۳n+۲}\right)+۲\tilde{G}\left(z_{۳n+۱},z_{۳n+۲},z_{۳n+۳}\right)}{۳}\Big\}\\
&=\tilde{G}\left(z_{۳n+۱},z_{۳n+۲},z_{۳n+۳}\right).\end{aligned}$$

بنابراین (۴) نتیجه می‌دهد که

$$\psi\left(\tilde{G}\left(z_{3n+1}, z_{3n+2}, z_{3n+3}\right)\right) \le \psi(\tilde{G}\left(z_{3n+1}, z_{3n+2}, z_{3n+3}\right))^k$$

که فقط زمانی امکان‌پذیر است که $\tilde{G}\left(z_{3n}, z_{3n+1}, z_{3n+2}\right)=0$، که به‌وضوح با (۲) در تناقض است. بنابراین،

$$\tilde{G}\left(z_{3n+1}, z_{3n+2}, z_{3n+3}\right) \le \tilde{G}\left(z_{3n}, z_{3n+1}, z_{3n+2}\right)$$

و

$$M\left(x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\right) = \tilde{G}\left(z_{3n}, z_{3n+1}, z_{3n+2}\right).$$

فرض کنید $k=3n$ و برای یک اندیس $n \ge 0$،

$$\tilde{G}\left(z_{3n+1}, z_{3n+2}, z_{3n+3}\right) \ge \tilde{G}\left(z_{3n}, z_{3n+1}, z_{3n+2}\right) > 0$$

و $z_{3n} \ne z_{3n+2}$. آنگاه، چون $Tx_{3n}Rx_{3n+1}Sx_{3n+2}$، لذا با استفاده از (۱) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\psi\left(\tilde{G}\left(z_{3n+1}, z_{3n+2}, z_{3n+3}\right)\right) &= \psi\left(\tilde{G}\left(fx_{3n}, gx_{3n+1}, hx_{3n+2}\right)\right) \\ &\le \psi(M\left(x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\right))^k,\end{aligned} \qquad (5)$$

که در آن،

$$\begin{aligned}
&M\left(x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\right) \\
&= \max\Big\{\tilde{G}\left(Tx_{3n}, Rx_{3n+1}, Sx_{3n+2}\right), \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}\left(Tx_{3n}, fx_{3n}, fx_{3n}\right)\right] \\
&\quad ,\tfrac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}\left(Rx_{3n+1}, gx_{3n+1}, gx_{3n+1}\right)\right], \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}\left(Sx_{3n+2}, hx_{3n+2}, hx_{3n+2}\right)\right], \\
&\quad \tfrac{1}{3}\Big(\tilde{G}\left(Tx_{3n}, Tx_{3n}, fx_{3n}\right) + \tilde{G}\left(Rx_{3n+1}, Rx_{3n+1}, gx_{3n+1}\right) + \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}\left(Sx_{3n+2}, Sx_{3n+2}, hx_{3n+2}\right)\right]\Big)\Big\} \\
&= \max\Big\{\tilde{G}\left(z_{3n}, z_{3n+1}, z_{3n+2}\right), \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}\left(z_{3n}, z_{3n+1}, z_{3n+1}\right)\right] \\
&\quad ,\tfrac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}\left(z_{3n+1}, z_{3n+2}, z_{3n+2}\right)\right], \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}\left(z_{3n+2}, z_{3n+3}, z_{3n+3}\right)\right], \\
&\quad \tfrac{1}{3}\Big(\tilde{G}\left(z_{3n}, z_{3n}, z_{3n+1}\right) + \tilde{G}\left(z_{3n+1}, z_{3n+1}, z_{3n+2}\right) + \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}\left[\tilde{G}\left(z_{3n+2}, z_{3n+2}, z_{3n+3}\right)\right]\Big)\Big\} \\
&\le \max\Big\{\tilde{G}\left(z_{3n}, z_{3n+1}, z_{3n+2}\right), \tilde{G}\left(z_{3n+1}, z_{3n+2}, z_{3n+3}\right), \\
&\quad \frac{\tilde{G}\left(z_{3n}, z_{3n+1}, z_{3n+2}\right) + 2\tilde{G}\left(z_{3n+1}, z_{3n+2}, z_{3n+3}\right)}{3}\Big\} \\
&= \tilde{G}\left(z_{3n+1}, z_{3n+2}, z_{3n+3}\right).
\end{aligned}$$

به‌طور مشابه، همانند آنچه که در بالا انجام شد می‌توان نشان داد که برای هر $k=3n$، رابطه (۳) برقرار است. همچنین می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned}\tilde{G}\left(z_{3n+2}, z_{3n+3}, z_{3n+4}\right) &\le \tilde{G}\left(z_{3n+1}, z_{3n+2}, z_{3n+3}\right) \\ &= M\left(x_{3n+1}, x_{3n+2}, x_{3n+3}\right),\end{aligned} \qquad (6)$$

و

$$\begin{aligned}\tilde{G}(z_{2n+3}, z_{2n+4}, z_{2n+5}) &\le \tilde{G}(z_{2n+2}, z_{2n+3}, z_{2n+4}) \\ &= M(x_{2n+2}, x_{2n+3}, x_{2n+4}).\end{aligned} \tag{7}$$

بنابراین، $\{\tilde{G}(z_k, z_{k+1}, z_{k+2})\}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد حقیقی نامنفی است. بنابراین، $r \ge 0$ی وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{G}(z_k, z_{k+1}, z_{k+2}) = r. \tag{8}$$

چون

$$\begin{aligned}\tilde{G}(z_{k+1}, z_{k+2}, z_{k+3}) &\le M(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) \\ &\le \tilde{G}(z_k, z_{k+1}, z_{k+2}).\end{aligned} \tag{9}$$

در (۹) با حد گرفتن زمانی که $k \to \infty$ نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{k\to\infty} M(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = r. \tag{10}$$

با حد گرفتن در نامساوی (۵) زمانی که $n \to \infty$ و با استفاده از (۸)، (۱۰) و پیوستگی تابع ψ نتیجه می‌گیریم که $\psi(r) \le \psi(r)^k$. لذا، $r = 0$. در نتیجه،

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{G}(z_k, z_{k+1}, z_{k+2}) = 0. \tag{11}$$

همچنین، با توجه به قسمت ۳ از **تعریف ۵** نتیجه می‌شود که

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{G}(z_k, z_{k+1}, z_{k+1}) = 0, \tag{12}$$

و چون برای هر $x, y \in X$، $\tilde{G}(x, y, y) \le \Omega\left[2\tilde{G}.(x, x, y)\right]$، لذا

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{G}(z_k, z_k, z_{k+1}) = 0. \tag{13}$$

مرحله II. حال نشان می‌دهیم که دنباله $\{z_n\}$ یک دنباله $\tilde{G}$ کوشی در X است.

به برهان خلف فرض می‌کنیم که $\varepsilon > 0$ی وجود دارد به‌طوری که متناظر با آن می‌توان زیردنباله‌های $\{z_{2m(k)}\}$ و $\{z_{2n(k)}\}$ از $\{z_{2n}\}$ را یافت به‌طوری‌که $n(k) > m(k) \ge k$ و

$$\tilde{G}\left(z_{2m(k)}, z_{2n(k)}, z_{2n(k)}\right) \ge \varepsilon, \tag{14}$$

که در آن $n(k)$ کوچکترین اندیسی است که متناظر با آن نامساوی بالا برقرار است، یعنی،

$$\tilde{G}\left(z_{2m(k)}, z_{2n(k)-1}, z_{2n(k)-1}\right) < \varepsilon. \tag{15}$$

با استفاده از نامساوی مستطیلی و رابطه (۱۵) داریم

$$\begin{aligned}&\tilde{G}\left(z_{2m(k)}, z_{2n(k)+1}, z_{2n(k)+2}\right) \\ &\le \Omega\Big[\tilde{G}\left(z_{2m(k)}, z_{2n(k)-1}, z_{2n(k)-1}\right) \\ &\quad + \tilde{G}\left(z_{2n(k)-1}, z_{2n(k)+1}, z_{2n(k)+2}\right)\Big] \\ &< \Omega\Big[\varepsilon + \tilde{G}\left(z_{2n(k)-1}, z_{2n(k)}, z_{2n(k)+1}\right)\Big].\end{aligned} \tag{16}$$

با حد گرفتن در (۱۶) و با توجه به (۱۱) و (۱۴) نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{G}\left(z_{2m(k)}, z_{2n(k)+1}, z_{2n(k)+2}\right) \le \Omega(\varepsilon). \tag{17}$$

مجدداً، با استفاده از نامساوی مستطیلی می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\tilde{G}\left(z_{2m(k)}, z_{2n(k)}, z_{2n(k)}\right) &\le \Omega\Big[\tilde{G}\left(z_{2m(k)}, z_{2m(k)+1}, z_{2m(k)+1}\right) + \tilde{G}\left(z_{2m(k)+1}, z_{2n(k)}, z_{2n(k)}\right)\Big] \\ &\le \Omega\Big[\tilde{G}\left(z_{2m(k)}, z_{2m(k)+1}, z_{2m(k)+1}\right) + \Omega\Big[\tilde{G}\left(z_{2m(k)+1}, z_{2n(k)+2}, z_{2n(k)+2}\right) + \tilde{G}\left(z_{2n(k)+2}, z_{2n(k)}, z_{2n(k)}\right)\Big]\Big] \\ &\le \Omega\Big[\tilde{G}\left(z_{2m(k)}, z_{2m(k)+1}, z_{2m(k)+1}\right) + \Omega\Big[\Omega\Big[\tilde{G}\left(z_{2m(k)+1}, z_{2n(k)+2}, z_{2n(k)+3}\right) + \tilde{G}\left(z_{2n(k)+3}, z_{2n(k)+3}, z_{2n(k)+2}\right)\Big] \\ &\qquad + \tilde{G}\left(z_{2n(k)+2}, z_{2n(k)}, z_{2n(k)}\right)\Big]\Big]\end{aligned}$$

با حد گرفتن نتیجه می‌شود که

$$\Omega^{-۳}(\varepsilon)\le \lim_{k\to\infty}\tilde{G}\left(z_{۳m(k)+۱},z_{۳n(k)+۲},z_{۳n(k)+۳}\right).$$

چون $Sx_{۳n(k)+۱}\prec Rx_{۳n(k)}\prec Tx_{۳m(k)}$، لذا با استفاده از رابطه (۱) می‌بینیم که

$$\begin{aligned}&\psi\left(\Omega^{۳}\left[\tilde{G}\left(z_{۳m(k)+۱},z_{۳n(k)+۲},z_{۳n(k)+۳}\right)\right]\right)\\&=\psi\left(\Omega^{۳}\left[\tilde{G}\left(fx_{۳m(k)},gx_{۳n(k)+۱},hx_{۳n(k)+۲}\right)\right]\right)\\&\le \psi(M\left(x_{۳m(k)},x_{۳n(k)+۱},x_{۳n(k)+۲}\right))^{k},\end{aligned}\quad(۱۸)$$

که در آن

$$\begin{aligned}&M\left(x_{۳m(k)},x_{۳n(k)+۱},x_{۳n(k)+۲}\right)\\&=\max\Big\{\tilde{G}\left(Tx_{۳m(k)},Rx_{۳n(k)+۱},Sx_{۳n(k)+۲}\right),\frac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}\left(Tx_{۳m(k)},fx_{۳m(k)},fx_{۳m(k)}\right)\right]\\&,\frac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}\left(Rx_{۳n(k)+۱},gx_{۳n(k)+۱},gx_{۳n(k)+۱}\right)\right],\frac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}\left(Sx_{۳n(k)+۲},hx_{۳n(k)+۲},hx_{۳n(k)+۲}\right)\right]\\&,\frac{\tilde{G}\left(Tx_{۳m(k)},Tx_{۳m(k)},fx_{۳m(k)}\right)+\tilde{G}\left(Rx_{۳n(k)+۱},Rx_{۳n(k)+۱},gx_{۳n(k)+۱}\right)}{۳}\\&+\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}\left(Sx_{۳n(k)+۲},Sx_{۳n(k)+۲},hx_{۳n(k)+۲}\right)\right]\right)\Big\}\\&=\max\Big\{\tilde{G}\left(z_{۳m(k)},z_{۳n(k)+۱},z_{۳n(k)+۲}\right),\frac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}\left(z_{۳m(k)},z_{۳m(k)+۱},z_{۳m(k)+۱}\right)\right]\\&,\frac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}\left(z_{۳n(k)+۱},z_{۳n(k)+۲},z_{۳n(k)+۲}\right)\right],\frac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}\left(z_{۳n(k)+۲},z_{۳n(k)+۳},z_{۳n(k)+۳}\right)\right]\\&,\frac{۱}{۳}\left(\tilde{G}\left(z_{۳m(k)},z_{۳m(k)},z_{۳m(k)+۱}\right)+\tilde{G}\left(z_{۳n(k)+۱},z_{۳n(k)+۱},z_{۳n(k)+۲}\right)+\frac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}\left(z_{۳n(k)+۲},z_{۳n(k)+۲},z_{۳n(k)+۳}\right)\right]\right)\Big\}\end{aligned}$$

با حد گرفتن و استفاده از روابط (۱۲)، (۱۳)، (۱۷) و (۱۸) می‌بینیم که

$$\psi(\varepsilon)\le\psi(\varepsilon)^{k},\quad(۱۹)$$

که یک تناقض است. لذا، $\{z_n\}$ یک دنباله $\tilde{G}$ کوشی است.

مرحله III. نشان می‌دهیم که S، R، h، g، f و T یک نقطه انطباق دارند.

چون $\{z_n\}$ یک دنباله $\tilde{G}$ کوشی در فضای $\tilde{G}$ متری کامل X می‌باشد، لذا نقطه‌ای مانند $z\in X$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$Tx_{۳n}\to z,\quad fx_{۳n}\to z,\quad n\to\infty.\quad(۲۰)$$

چون زوج (f,T) سازگار است، لذا

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{G}\left(Tfx_{۳n},fTx_{۳n},fTx_{۳n}\right)=۰.\quad(۲۱)$$

به‌علاوه، با توجه به $\lim_{n\to\infty}\tilde{G}\left(fx_{۳n},fx_{۳n},z\right)=۰$، $\lim_{n\to\infty}\tilde{G}\left(Tx_{۳n},z,z\right)=۰$ و پیوستگی T و f می‌بینیم که

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\tilde{G}\left(Tfx_{۳n},Tfx_{۳n},Tz\right)=۰\\&=\lim_{n\to\infty}\tilde{G}\left(fTx_{۳n},fz,fz\right).\end{aligned}\quad(۲۲)$$

با استفاده از نامساوی مستطیلی،

$$\begin{aligned}&\tilde{G}(Tz,fz,fz)\le\Omega\left[\tilde{G}\left(Tz,Tfx_{۳n},Tfx_{۳n}\right)+\tilde{G}\left(Tfx_{۳n},fz,fz\right)\right]\\&\le\Omega\left[\tilde{G}\left(Tz,Tfx_{۳n},Tfx_{۳n}\right)+\Omega\left[\tilde{G}\left(Tfx_{۳n},fTx_{۳n},fTx_{۳n}\right)+\tilde{G}\left(fTx_{۳n},fz,fz\right)\right]\right]\end{aligned}\quad(۲۳)$$

با حد گرفتن در رابطه بالا می‌بینیم که

$$\tilde{G}(Tz, fz, fz) \le ۰,$$

که نتیجه می‌دهد که $fz = Tz$، یعنی، z یک نقطه انطباق نگاشت‌های f و T می‌باشد.

به‌طور مشابه، $g(z) = R(z)$ و $h(z) = S(z)$. حال فرض کنید Sz، Rz و Tz مقایسه‌پذیرند. با توجه به نامساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\psi\left(\tilde{G}(fz, gz, hz)\right) \le \psi(M(z,z,z))^k, \qquad (۲۴)$$

که در آن

$$\begin{aligned} M(z,z,z) = \max\Big\{&\tilde{G}(Tz, Rz, Sz), \tfrac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}(Tz, fz, fz)\right] \\ &, \tfrac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}(Rz, gz, gz)\right], \tfrac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}(Sz, hz, hz)\right], \\ &, \tfrac{۱}{۳}\left(\tilde{G}(Tz, Tz, fz) + \tilde{G}(Rz, Rz, gz) + \tfrac{۱}{۲}\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}(Sz, Sz, hz)\right]\right)\Big\} \\ = \tilde{G}(Tz, Rz, Sz) &= \tilde{G}(fz, gz, hz). \end{aligned}$$

لذا، (۲۴) نتیجه می‌دهد که

$$\psi\left(\tilde{G}(fz, gz, hz)\right) \le \psi(\tilde{G}(fz, gz, hz))^k.$$

بنابراین، $fz = gz = hz = Tz = Rz = Sz$. □

در قضیه زیر، فرض پیوستگی نگاشت‌های f، g، S، R، h،و T را نادیده می‌گیریم و سازگاری زوج‌های (f, T)، (g, R) و (h, S) را با سازگاری ضعیف آنها جایگزین می‌کنیم.

قضیه ۳. فرض کنید $(X, \prec, \tilde{G})$ یک فضای $\tilde{G}$ متری با خاصیت s.l.c. باشد و $f, g, h, R, S, T : X \to X$ شش نگاشت باشند به‌طوری که $f(X) \subseteq R(X)$، $g(X) \subseteq S(X)$، $h(X) \subseteq T(X)$ و SX، RX و TX زیرمجموعه‌هایی کامل از X باشند. فرض کنید برای عناصر مقایسه‌پذیر $Tx, Ry, Sz \in X$ داشته باشیم:

$$\psi\left(\Omega^۳\left[\tilde{G}(fx, gy, hz)\right]\right) \le \psi(M(x,y,z))^k, \qquad (۲۵)$$

که در آن $\psi \in \Psi$ و $k \in [۰, ۱)$. آنگاه، زوج‌های (g, R)، (f, T)و (h, S) یک نقطه انطباق مانند z در X دارند، اگر (g, R)، (f, T) و (h, S) سازگار ضعیف باشند و زوج‌های (g, h)، (f, g) و (h, f) به‌ترتیب صعودی ضعیف جزئی نسبت به نگاشت‌های S، R و T باشند، به‌علاوه، اگر Rz، Sz و Tz مقایسه‌پذیر باشند، آنگاه $z \in X$ یک نقطه انطباقی برای نگاشت‌های S، R، h، g، f و T می‌باشد.

برهان: با مرور اثبات **قضیه ۲** می‌بینیم که نقطه‌ای مانند $z \in X$ وجود دارد به‌طوری که:

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{G}(z_k, z_k, z) = ۰. \qquad (۲۶)$$

چون $R(X)$ کامل است و $\{z_{۲n+۱}\} \subseteq R(X)$ ، لذا، $z \in R(X)$. به‌طور مشابه، عنصر $u \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $z = Ru$ و

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{G}(z_{۲n+۱}, z_{۲n+۱}, Ru) = \lim_{n\to\infty} \tilde{G}(Rx_{۲n+۱}, Rx_{۲n+۱}, Ru) = ۰. \qquad (۲۷)$$

همچنین، نقاطی مانند $v, w \in X$ وجود دارند به‌طوری که $z = Sv = Tw$ و

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{G}(Sx_{۲n+۲}, Sx_{۲n+۲}, Sv) = \lim_{n\to\infty} \tilde{G}(Tx_{۲n}, Tx_{۲n}, Tw) = ۰. \qquad (۲۸)$$

حال نشان می‌دهیم که w یک نقطه انطباق نگاشت‌های f و T می‌باشد. چون

$$Sx_{۲n+۲} \to z = Tw = Ru,$$

لذا

$$Sx_{۲n+۲} \prec Tw = Ru.$$

بنابراین با استفاده از نامساوی (۱) می‌بینیم که

$$\psi\left(\tilde{G}(fw, gu, hx_{۲n+۲})\right) \le \psi(M(w, u, x_{۲n+۲}))^k, \qquad (۲۹)$$

که در آن،

$$M(w,u,x_{۲n+۲}) = \max\left\{\tilde{G}(Tw, Ru, Sx_{۲n+۲}), \frac{۱}{۲}\Omega\left[\tilde{G}(Tw, fw, fw)\right], \frac{۱}{۲}\Omega\left[\tilde{G}(Ru, gu, gu)\right], \frac{۱}{۲}\Omega\left[\tilde{G}(Sx_{۲n+۲}, hx_{۲n+۲}, hx_{۲n+۲})\right], \frac{\tilde{G}(Tw,Tw,fw) + \tilde{G}(Ru,Ru,gu) + \tilde{G}(Sx_{۲n+۲}, Sx_{۲n+۲}, hx_{۲n+۲})}{۳}\right\}.$$

با حد گرفتن در (۲۹) می‌بینیم که

$$\begin{aligned}
&\psi\left(\Omega\left[\tilde{G}(fw, gu, z)\right]\right) \\
&\le \psi\left(\Omega^{۲}\left[\Omega^{-۱}\left[\tilde{G}(fw, gu, z)\right]\right]\right) \\
&\le \psi\left(\Omega^{۲}\left[\liminf_{n\to\infty} \tilde{G}(fw, gu, hx_{۲n+۲})\right]\right) \\
&\le \psi(\Omega\left[\tilde{G}(fw, gu, z)\right])^k,
\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد که $gu = fw = z = Tw = Ru$.

چون نگاشت‌های f و T سازگار ضعیف هستند، لذا، $fz = fTw = Tfw = Tz$. در نتیجه، z یک نقطه انطباق نگاشت‌های f و T می‌باشد.

به‌طور مشابه، می‌توان نشان داد که z یک نقطه انطباق زوج‌های (g, R) و (h, S) می‌باشد. ادامه اثبات همانند آنچه که در **قضیه ۲** انجام شد، می‌باشد.

با انتخاب $k = \frac{۱}{n}$، $\psi(t) = e^t$ که در آن $n > ۱$ و $T = R = S$ در **قضیه ۲** نتیجه زیر را به‌دست می‌آوریم.

نتیجه ۱. فرض کنید $(X, \prec, G_b)$ یک فضای G_b- متری کامل جزئاً مرتب با ضریب s و $f, g, h, R : X \to X$ چهار نگاشت باشند به‌طوری‌که $f(X) \cup g(X) \cup h(X) \subseteq R(X)$. فرض کنید برای عناصر مقایسه‌پذیر $Rx, Ry, Rz \in X$ داشته باشیم

$$e^{e^{s\cdot e^{s\cdot e^{s\cdot\left(e^{G(fx,gy,hz)}-۱\right)}-۱}-۱}-۱} \le \sqrt[n]{e^{(M(x,y,z))}},$$

که در آن

$$M(x,y,z)=\max\Big\{e^{G(Rx,Ry,Rz)}-۱,\frac{۱}{۲s}G(Rx,fx,fx),\frac{۱}{۲s}G(Ry,gy,gy),\frac{۱}{۲s}G(Rz,hz,hz),\frac{۱}{۳}\Big(e^{G(Rx,Rx,fx)}-۱+e^{G(Ry,Ry,gy)}-۱+\frac{۱}{۲s}G(Rz,Rz,hz)\Big)\Big\}.$$

آنگاه، h، g، f و R یک نقطه انطباق در X دارند، اگر زوج‌های (g,h)، (f,g) و (h,f) صعودی ضعیف جزئی نسبت به R باشند و

(a) f پیوسته و زوج (f,R) سازگار باشد، یا،

(b) g پیوسته و زوج (g,R) سازگار باشد، و یا،

(c) h پیوسته و زوج (h,R) سازگار باشد.

برهان. کافی است $\tilde{G}(x,y,z)=e^{G(x,y,z)}-۱$ انتخاب شود. □

با انتخاب $f=g=h$، $R=S=T$ $(n>۱)$ $k=\frac{۱}{n}$، $\psi(t)=\cosh t$ در **قضیه ۲**، نتیجه نقطه انطباق زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۲. فرض کنید $(X,\prec,G)$ یک فضای G_b– متری کامل جزئاً مرتب باشد و $f,R:X\to X$ دو نگاشت باشند به‌طوری که $f(X)\subseteq R(X)$. فرض کنید برای عناصر مقایسه‌پذیر $Rx,Ry,Rz\in X$ داشته باشیم:

$$\cosh\Big(\sinh\big(s\cdot\sinh\big(s\cdot\sinh\big(s\cdot\sinh\big[G(fx,fy,fz)\big]\big)\big)\big)\Big)\le\sqrt[n]{\cosh\big(M(x,y,z)\big)},$$

که در آن

$$M(x,y,z)=\max\Big\{\sinh\big(G(Rx,Ry,Rz)\big),\frac{۱}{۲s}G(Rx,fx,fx),\frac{۱}{۲s}G(Ry,fy,fy),\frac{۱}{۲s}G(Rz,fz,fz),\frac{۱}{۳}\Big(\sinh\big(G(Rx,Rx,fx)\big)+\sinh\big(G(Ry,Ry,fy)\big)+\frac{۱}{۲s}G(Rz,Rz,fz)\Big)\Big\}.$$

آنگاه، زوج (f,R) یک نقطه انطباق در X دارد اگر fو R پیوسته، زوج (f,R) سازگار و f صعودی ضعیف نسبت به R باشد.

برهان. کافی است

$$\tilde{G}(x,y,z)=\sinh\big(G(x,y,z)\big)$$

انتخاب شود. □

مثال ۳. فرض کنید $X=\left[۰,\frac{۲۳}{۴}\right]$ و $\tilde{G}$ روی X به‌صورت

$$\tilde{G}(x,y,z)=\sinh\big[|x-y|+|y-z|+|x-z|\big]$$

تعریف شده باشد. رابطه مرتب جزئی "$\prec$" روی X را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x\prec y\Leftrightarrow y\le x,\quad\forall x,y\in X.$$

خودنگاشت‌های T، S، h، g و f، R روی X را به‌صورت

$$fx=\sinh^{-1}\frac{x}{15},\qquad Rx=\sinh\frac{2x}{5},$$
$$gx=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{30}\right),\quad Sx=\sinh\frac{x}{5},$$
$$hx=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{45}\right),\quad Tx=\sinh\frac{2x}{15}$$

تعریف می‌کنیم. برای نشان دادن آنکه زوج (f,g) صعودی ضعیف جزئی نسبت به R می‌باشد، فرض کنید $x,y\in X$ و $y\in R^{-1}fx$، یعنی $Ry=fx$. با توجه به تعریف نگاشت‌های f و R، نتیجه می‌شود که $\sinh^{-1}\frac{x}{15}=\sinh\frac{2y}{5}$ و لذا، $y=\frac{5}{2}\sinh^{-1}\left(\sinh^{-1}\frac{x}{15}\right)$. با توجه به نامساوی

$$\sinh\left(\sinh\left(12x/15\right)\right)\geq\left(x/15\right)$$

که برای هر $x\geq 0$ برقرار است، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}fx&=\sinh^{-1}\frac{x}{15}\\&\geq\sinh^{-1}\left(\frac{1}{12}\sinh^{-1}\left(\sinh^{-1}\frac{x}{15}\right)\right)\\&=\sinh^{-1}\left(\frac{y}{30}\right)=gy.\end{aligned}$$

لذا، $fx\prec gy$. در نتیجه، زوج (f,g) صعودی ضعیف جزئی نسبت به نگاشت R می‌باشد.

برای نشان دادن آنکه زوج (g,h) صعودی ضعیف جزئی نسبت به نگاشت S می‌باشد، فرض کنید $x,y\in X$ و $y\in S^{-1}gx$ ، یعنی، $Sy=gx$. طبق تعریف نگاشت‌های g و S می‌بینیم که $\sinh^{-1}\frac{x}{30}=\sinh\frac{y}{5}$ و لذا، $y=5\sinh^{-1}\left(\sinh^{-1}\frac{x}{30}\right)$. با توجه به نامساوی

$$\sinh\left(\sinh\left(9x/30\right)\right)\geq\left(x/30\right)$$

که برای هر $x\geq 0$ برقرار است، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}gx&=\sinh^{-1}\frac{x}{30}\\&\geq\sinh^{-1}\left(\frac{1}{9}\sinh^{-1}\left(\sinh^{-1}\frac{x}{30}\right)\right)\\&=\sinh^{-1}\left(\frac{y}{45}\right)=hy.\end{aligned}$$

بنابراین، $fx\prec gy$. لذا، زوج (f,g) صعودی ضعیف جزئی نسبت به نگاشت R است.

برای نشان دادن آنکه زوج (h,f) صعودی ضعیف جزئی نسبت به نگاشت T می‌باشد، فرض کنید $x,y\in X$ و $y\in T^{-1}hx$، یعنی $Ty=hx$. بر اساس ضابطه‌های نگاشت‌های h و T نتیجه می‌شود که $\sinh^{-1}\frac{x}{45}=\sinh\frac{2y}{15}$ و لذا، $y=\frac{15}{2}\sinh^{-1}\left(\sinh^{-1}\frac{x}{45}\right)$. با توجه به نامساوی

$$\sinh\left(\sinh\left(2x/45\right)\right)\geq\left(x/45\right)$$

که برای هر $x\geq 0$ برقرار است، می‌بینیم که

$$\begin{aligned}hx&=\sinh^{-1}\frac{x}{45}\\&\geq\sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\sinh^{-1}\left(\sinh^{-1}\frac{x}{45}\right)\right)\\&=\sinh^{-1}\left(\frac{y}{15}\right)=fy.\end{aligned}$$

لذا، $fx\prec gy$. در نتیجه، (f,g) یک زوج صعودی ضعیف نسبت به نگاشت R می‌باشد.

به‌علاوه،

$$\begin{aligned}fX&=\left[0,,0.37451660918\right]\\&\subseteq RX=\left[0,4.93696180555\right]\\gX&=\left[0,,0.19051213779\right]\\&\subseteq\left[0,1.42077807016\right]=SX\end{aligned}$$

و

$$hX=[0,0.127432599986]$$
$$\subseteq TX=[0,0.84400999897]$$

و زوج‌های (g,R)، (f,T) و (h,S) سازگارند. در واقع، اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد به‌طوری‌که برای نقطه‌ای مانند $t\in X$،

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{G}(t,fx_n,fx_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\tilde{G}(t,Tx_n,Tx_n)=0,$$

آنگاه،

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sinh^{-1}\frac{x_n}{15}-t\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sinh\frac{2x_n}{15}-t\right|=0.$$

پیوستگی توابع $\sinh^{-1}$ و $\sinh$ نتیجه می‌دهد که

$$\sinh^{-1}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{15}\right]=\sinh 2\left[\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{15}\right]=t=0,$$

و لذا، $\lim_{n\to\infty}\tilde{G}(fTx_n,fTx_n,Tfx_n)=0$.

فرض کنید $\psi:[0,\infty)\to[1,\infty)$ به‌صورت $\psi(t)=\frac{2\cosh t}{1+\cosh t}$ تعریف شده باشد. با استفاده از قضیه مقدار میانگین به‌طور هم‌زمان برای توابع $\sinh^{-1}$ و $\sinh$ می‌بینیم که

$$\begin{aligned}
&\psi\left(\Omega^{3}\left(\tilde{G}(fx,gy,hz)\right)\right)\\
&=\frac{2\cosh\left(\Omega^{3}\left(\sinh\left(|fx-gy|+|fx-hz|+|gy-hz|\right)\right)\right)}{1+\cosh\left(\Omega^{3}\left(\sinh\left(|fx-gy|+|fx-hz|+|gy-hz|\right)\right)\right)}\\
&\le\frac{2\cosh\left(\Omega^{3}\left(\sinh\left(\frac{1}{30}|2x-y|+\frac{1}{45}|3x-z|+\frac{1}{90}|3y-2z|\right)\right)\right)}{1+\cosh\left(\Omega^{3}\left(\sinh\left(\frac{1}{30}|2x-y|+\frac{1}{45}|3x-z|+\frac{1}{90}|3y-2z|\right)\right)\right)}\\
&=\frac{2\cosh\left(\Omega^{3}\left(\sinh\left(\frac{\left(|6x-3y|+|6x-2z|+|3y-2z|\right)}{90}\right)\right)\right)}{1+\cosh\left(\Omega^{3}\left(\sinh\left(\frac{\left(|6x-3y|+|6x-2z|+|3y-2z|\right)}{90}\right)\right)\right)}\\
&\le\sqrt{\frac{2\cosh\left[\sinh\left(|Tx-Ry|+|Ry-Sz|+|Sz-Tx|\right)\right]}{1+2\cosh\left[\sinh\left(|Tx-Ry|+|Ry-Sz|+|Sz-Tx|\right)\right]}}\\
&=\sqrt{\frac{2\cosh\left[\tilde{G}(Tx,Ry,Sz)\right]}{1+\cosh\left[\tilde{G}(Tx,Ry,Sz)\right]}}\le\sqrt{\frac{2\cosh\left[M(x,y,z)\right]}{1+\cosh\left[M(x,y,z)\right]}}.
\end{aligned}$$

لذا، شرط انقباضی (۱) برای هر $x,y,z\in X$ برقرار است. بنابراین، تمام شرایط **قضیه ۲** برقرارند. در نتیجه، ۰ تنها نقطه انطباق نگاشت‌های S R، h، g، f، و T می‌باشد.

۳ وجود جواب مشترک برای دستگاهی از معادلات انتگرال

با الهام از کار انجام شده در [۱۶, ۱۹]، دستگاه معادلات انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x(t)=\int_a^b K_1(t,s,x(s))ds+k(t),$$
$$x(t)=\int_a^b K_2(t,s,x(s))ds+k(t), \qquad (30)$$
$$x(t)=\int_a^b K_3(t,s,x(s))ds+k(t).$$

در دستگاه فوق $b>a\geq 0$. هدف این بخش اثبات وجود جوابی برای دستگاه (۳۰) در مجموعه $X=C[a,b]$، مجموعه توابع حقیقی مقدار پیوسته تعریف شده روی بازه $[a,b]$ به عنوان کاربردی از **نتیجه ۱** می‌باشد.

مسئله مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر تغییر داد: فرض کنید $f,g,h:X\to X$ به‌صورت زیر تعریف شده باشند:

$$fx(t)=\int_a^b K_1(\ ,s,x(s))ds+k(t)$$
$$gx(t)=\int_a^b K_2(t,s,x(s))ds+k(t)$$
$$hx(t)=\int_a^b K_3(t,s,x(s))ds+k(t),$$

$x\in X$ و $t\in[a,b]$. به‌وضوح، وجود جواب برای دستگاه (۳۰) با وجود یک نقطه ثابت مشترک برای نگاشت‌های f ، g و h هم‌ارز است.

فرض کنید

$$d(u,v)=\max_{t\in a,b]}|u(t)-v(t)|=||u-v||_\infty .$$

همچنین، فرض کنید X مجهز به G متری اصلاح-شده تعریف شده با ضابطه

$$\tilde{G}(u,v,w)$$
$$=\xi\left(\max\{d(u,v),d(v,w),d(w,u)\}\right),$$

باشد که در آن $u,v,w\in X$ و $\xi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ یک تابع پیوسته اکیداً صعودی با شرط $(t\geq 0)$ $t\leq\xi(t)$ و $\xi(0)=0$ باشد. به‌وضوح یک فضای کامل $\tilde{G}$ متری ساخته‌ایم. همچنین، مجموعه X را با ترتیب جزئی تعریف شده با $x\prec y\Leftrightarrow x(t)\leq y(t)$ که در آن $t\in[a,b]$ در نظر می‌گیریم. واضح است که $(X,\prec)$ دارای خاصیت s.l.c. می‌باشد [۲۱].

حال، نتیجه زیر را بیان و ثابت می‌کنیم.

نتیجه ۳. فرض کنید شرایط زیر برقرارند:

(i) $K_1,K_2,K_3:[a,b]\times[a,b]\times R\to R$ و $k:[a,b]\to R$ پیوسته باشند،

(ii) برای هر $t,s\in[a,b]$ و $x\in X$،

$$K_1(t,s,x(s))$$
$$\leq K_2\left(t,s,\int_a^b K_1(t,s,x(s))ds+k(t)\right),$$
$$K_2(t,s,x(s))\leq$$
$$K_3\left(t,s,\int_a^b K_2(\ ,s,x(s))ds+k(t)\right)$$

و

$$K_3(t,s,x(s))$$
$$\leq K_1\left(t,s,\int_a^b K_3(\ ,s,x(s))ds+k(t)\right).$$

(iii) برای هر $s,t\in[a,b]$ و $x,y\in X$ با شرط $x\prec y$،

$$\xi^{3}\left(\int_a^b \left|K_{1}\left(t,r,x(r)\right)-K_{2}\left(t,r,y(r)\right)\right| dr\right) \le \frac{\xi^{3}\left(\| fx-gy\|_\infty\right)\theta(M(x,y,z))^{\frac{1}{2}}}{\theta\left(\xi^{3}\left(\| fx-gy\|_\infty\right)\right)},$$

$$\xi^{3}\left(\int_a^b \left|K_{2}\left(t,r,x(r)\right)-K_{3}\left(t,r,y(r)\right)\right| dr\right) \le \frac{\xi^{3}\left(\| gy-hz\|_\infty\right)\theta(M(x,y,z))^{\frac{1}{2}}}{\theta\left(\xi^{3}\left(\| gy-hz\|_\infty\right)\right)}$$

و

$$\xi^{3}\left(\int_a^b \left|K_{3}\left(t,r,x(r)\right)-K_{1}\left(t,r,y(r)\right)\right| dr\right) \le \frac{\xi^{3}\left(\| hz-fx\|_\infty\right)\theta(M(x,y,z))^{\frac{1}{2}}}{\theta\left(\xi^{3}\left(\| hz-fx\|_\infty\right)\right)},$$

که در آن $t\in[a,b]$ و

$$\begin{aligned} M(x,y,z)=\max\Big\{&\xi\left(G(Rx,Ry,Rz)\right),\frac{1}{2}G(Rx,fx,fx)\\ &,\frac{1}{2}G(Ry,gy,gy),\frac{1}{2}G(Rz,hz,hz)\\ &,\frac{1}{3}\left(\xi\left(G(Rx,Rx,fx)\right)+\xi\left(G(Ry,Ry,gy)\right)+\frac{1}{2}G(Rz,Rz,hz)\right)\Big\}\end{aligned}$$

که در آن $\theta\in\Psi$. در این صورت، معادلات انتگرال دستگاه (۳۰) جوابی مانند $x\in X$ دارد.

برهان. با توجه به شرط (ii)، زوج‌های مرتب (f,g)، (g,h) و (h,f) صعودی ضعیف جزئی هستند. حال، فرض کنید $x,y\in X$ چنان باشند که $x\prec y$. با توجه به شرط (iii)، برای هر $t\in[a,b]$،

$$\begin{aligned}&\xi^{4}\left(\left|fx(t)-gy(t)\right|\right)\\ &\le \xi^{4}\left(\int_a^b \left| K_{1}\left(t,s,x(s)\right)-K_{2}(t,s,y(s)\right| ds\right)\\ &\le \frac{\xi^{4}\left(\| fx-gy\|_\infty\right)\theta\left(M(x,y,z)\right)^{\frac{1}{2}}}{\theta\left(\xi^{4}\left(\| fx-gy\|_\infty\right)\right)}.\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}&\xi^{4}\left(d(fx,gy)\right)\\ &=\xi^{4}\left(\sup_{t\in a,b]}\left|fx(t)-gy(t)\right|\right) \qquad (۳۱)\\ &\le \frac{\xi^{4}\left(\| fx-gy\|_\infty\right)\theta(M(x,y,z))^{\frac{1}{2}}}{\theta\left(\xi^{4}\left(\| fx-gy\|_\infty\right)\right)}.\end{aligned}$$

به‌طور مشابه، می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned}&\xi^{4}\left(d(gy,hz)\right)\\ &=\left(\sup_{t\in a,b]}\left|gy(t)-hz(t)\right|\right)^{2} \qquad (۳۲)\\ &\le \frac{\xi^{4}\left(\| gy-hz\|_\infty\right)\theta\left(M(x,y,z)\right)^{\frac{1}{2}}}{\theta\left(\xi^{4}\left(\| gy-hz\|_\infty\right)\right)},\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}&\xi^{4}\left(d(hz,fx)\right)\\ &=\left(\sup_{t\in a,b]}\left|hz(t)-fx(t)\right|\right)^{2} \qquad (۳۳)\\ &\le \frac{\xi^{4}\left(\| hx-fy\|_\infty\right)\theta\left(M(x,y)\right)^{\frac{1}{2}}}{\theta\left(\xi^{4}\left(\| hz-fx\|_\infty\right)\right)}.\end{aligned}$$

لذا،

$$\theta\left(\xi^{4}\left(\| fx-gy\|_\infty\right)\right)\le\theta\left(M(x,y)\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (۳۴)$$

به طریقی مشابه، نتیجه می‌شود که

$$\theta\left(\xi^{4}\left(\| gy-hz\|_\infty\right)\right)\le\theta(M(x,y))^{\frac{1}{2}}, \qquad (۳۵)$$

و

$$\theta\left(\xi^{۴}\left(\| hz-fx \|_{\infty}\right)\right)\le \theta(M\left(x,y\right))^{\frac{۱}{۲}}. \quad (۳۶)$$

در نتیجه، با توجه به روابط (۳۴)، (۳۵) و (۳۶) می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\theta\left(\xi^{۳}\left(\tilde{G}\left(fx,gy,hz\right)\right)\right)&=\theta\left(\xi^{۳}\left(\xi\left(\max\left\{d\left(fx,gy\right),d\left(gy,hz\right),d\left(hz,fx\right)\right\}\right)\right)\right)\\&\le \max\left\{\theta\left(\xi^{۴}\left(d\left(fx,gy\right)\right)\right),\theta\left(\xi^{۴}\left(d\left(gy,hz\right)\right)\right),\theta\left(\xi^{۴}\left(d\left(hz,fx\right)\right)\right)\right\}\\&\le \theta(M\left(x,y\right))^{\frac{۱}{۲}}.\end{aligned}$$

با انتخاب $R=I_X$ در **نتیجه ۱**، نتیجه می‌شود که عضوی مانند $x\in X$ وجود دارد به‌طوری که یک نقطه ثابت مشترک برای نگاشت‌های f، g و h یعنی، جوابی برای دستگاه (۳۰) می‌باشد.

References

[1] S. Sessa, On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations, Publ. Inst. Math., 32 (1982) 149-153.

[2] G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points, Int. J. Math. Math. Sci., 9 (1986) 771-779.

[3] G. Jungck, Common fixed points for noncontinuous nonself maps on nonmetric spaces, Far Persian J. Math. Sci., 4 (1996) 199-215.

[4] S. Czerwik, Contraction mappings in b-metric spaces, Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, 1 (1993) 5-11.

[5] S. Czerwik, Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces, Atti Del Seminario Matematico E Fisico Universita Di Modena, 46 (1998) 263-276.

[6] Z. Mustafa, F. Awawdeh, W. Shatanawi, Fixed point theorem for expansive mappings in G-metric spaces, Int. J. Contemporary Math. Sci., 5 (2010) 2463-2472.

[7] Z. Mustafa, H. Aydi, E. Karapınar, On common fixed points in G-metric spaces using (EA) property, Comput. Math. Appl., 64 (2012) 1944-1956.

[8] Z. Mustafa, M. Khandagji, W. Shatanawi, Fixed point results on complete G-metric spaces, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 48 (2011) 304-319.

[9] Z. Mustafa, H. Obiedat, F. Awawdeh, Some fixed point theorem for mapping on complete G-metric spaces, Fixed point theory Appl., 2008 (2008) 189870.

[10] Z. Mustafa, V. Parvaneh, M. Abbas, J.R. Roshan, Some coincidence point results for generalized (ψ, φ)-weakly contractive mappings in ordered G-metric spaces, Fixed Point Theory Appl., 2013 (2013) 326.

[11] Z. Mustafa, J.R. Roshan, V. Parvaneh, Coupled coincidence point results for (ψ, φ)-weakly contractive mappings in partially ordered G b-metric spaces, Fixed Point Theory Appl., 2013 (2013) 206.

[12] Z. Mustafa, W. Shatanawi, M. Bataineh, Existence of Fixed Point Results in G-metric spaces, Int. J. Math. Math. Sci., 2009 (2009).

[13] Z. Mustafa, B. Sims, Some remarks concerning D-metric spaces, in: Proceedings of the International Conference on Fixed Point Theory and Applications, Valencia, Spain, 2004, pp. 189-198.

[14] Z. Mustafa, B. Sims, Fixed point theorems for contractive mappings in complete-metric

spaces, Fixed point theory Appl., 2009 (2009) 917175.

[15] A. Aghajani, M. Abbas, J.R. Roshan, Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered Gb-metric spaces, Filomat, 28 (2014) 1087-1101.

[16] M. Abbas, S.H. Khan, T. Nazir, Common fixed points of R-weakly commuting maps in generalized metric spaces, Fixed Point Theory Appl., 41 (2011).

[17] I. Altun, H. Simsek, Some fixed point theorems on ordered metric spaces and application, Fixed Point Theory Appl., 2010 (2010) 621469.

[18] H.K. Nashine, B. Samet, Fixed point results for mappings satisfying (ψ, φ)-weakly contractive condition in partially ordered metric spaces, Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl., 74 (2011) 2201-2209.

[19] J. Esmaily, S.M. Vaezpour, B.E. Rhoades, Coincidence point theorem for generalized weakly contractions in ordered metric spaces, Appl. Math. Comput., 219 (2012) 1536-1548.

[20] M. Jleli, E. Karapınar, B. Samet, Further generalizations of the Banach contraction principle, J. Inequal. Appl., 2014 (2014) 439.

[21] J.J. Nieto, R. Rodríguez-López, Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, Acta Math. Sinica, English Series, 23 (2007) 2205-2212.