Complex and Nonlinear Systems
Vol. 1, No. 2, Winter 2018, pp. 75-87

سیستم‌های مختلط و غیرخطی
سال ۱، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۶، صص ۷۵ تا ۸۷

حل عددی معادله غیرخطی برگرز با کمک تبدیل کول– هوپف

احمدرضا حقیقی[۱،۲،*]، زهرا عباسی[۳]

۱. دانشیار، گروه ریاضی، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران
۲. دانشیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه
۳. پژوهشگر، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۹/۰۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۱/۱۳

Numerical solution of the non-linear Burgers equations using Hopf-Cole transformation

Ahmadreza Haghighi[1,2,*], Zahra Abbasi[3]

1. Associate Professor, Department of Mathematics, Technical and Vocational University (TVU), Tehran
2. Associate Professor, Department of Mathematics, Urmia University of Technology
3. Researcher, Department of Mathematics, Urmia University of Technology

Received: 11/22/2017 Accepted: 2/2/2018

چکیده: هدف اصلی این مقاله حل عددی معادله برگرز غیرخطی یک‌بُعدی و دوبُعدی کوپله با شرایط اولیه و مرزی مناسب با کمک تبدیل کول–هوپف و دو روش (LFDM) و (CN-DF) می‌باشد. در واقع با استفاده از تبدیل غیرخطی کول–هوپف معادله برگرز یک‌بُعدی و دوبُعدی به معادله انتشار کاهش می‌یابد. سپس با به‌کارگیری روش تفاضل متناهی لگاریتمی (LFDM) معادله انتشار نسبت به مشتق زمان گسسته و در نهایت معادله حاصل با کمک روش (CN-DF) حل می‌شود. در پایان، با مقایسه نتایج عددی حاصل از تغییر عوامل گوناگون از جمله ویسکوزیته و بررسی اندازه خطا، عملکرد مناسب روش عددی و انطباق آن با جواب تحلیلی نمایان می‌شود.

کلمات کلیدی: معادله برگرز، تبدیل کول–هویف، روش تفاضل متناهی لگاریتمی، روش کرانک نیکلسون–دیوفرت و فرانک.

Abstract: The main purpose of this article is devoted to the numerical solution of coupled one and two-dimensional non-linear Burgers equations with suitable initial and boundary conditions, by using Hopf-Cole transformation and two techniques (LFDM) and (CN-DF). In fact, using a non-linear Cole-Hope transformation the one and two-dimensional non-linear Burgers equations are reduced to diffusion equations. Then, the logarithmic finite-difference technique (LFDM) is used to discretize the diffusion equation, and the resulting equation is solved by (CN-DF) scheme. In the end, comparison of the numerical results from the change of various factors such as viscosity and the measurement of the error, the proper functioning of the numerical method and its adaptation to the analytical solution are evident.

Keywords: Burgers equation, Hopf-Cole transformation, Logarithmic finite-difference technique, Crank-Nicolson-Du Fort and Frankel scheme

۱ مقدمه

معادله برگرز فرم ساده شده معادله ناویراستوکس است، که از جملات فشار و پیوستگی صرف‌نظر شده، باقی‌مانده جملات شامل جملات جابجایی و پخشی را معادله برگرز می‌نامند [۳]. معادله برگرز یک بعدی به فرم زیر می‌باشد:

*نویسنده مسئول

*Corresponding author: ah.haghighi@gmail.com

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}},\ a\le x\le b,\ 0\le t\le T \qquad (1)$$

با شرایط اولیه و مرزی زیر

$$\begin{aligned} u(x,0)&=u_0(x),\\ u(a,t)&=f_1(x),\\ u(b,t)&=f_2(t). \end{aligned} \qquad (2)$$

ν ضریب ویسکوزیته[1] که به فرم $\nu=\frac{1}{Re}$ تعریف می‌گردد (Re همان عدد رینولدز می‌باشد) و $u\frac{\partial u}{\partial x}$ جمله غیرخطی جابجایی و $\nu\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}$ جمله پخشی[2] است [۲]. زمانی‌که $\nu=0$ معادله برگرز غیرلزج نامیده می‌شود. همچنین معادله برگرز دوبُعدی کوپله نیز به فرم زیر می‌باشد [۳]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}&=\nu\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}+\nu\frac{\partial^{2} u}{\partial y^{2}},\\ \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}&=\nu\frac{\partial^{2} v}{\partial x^{2}}+\nu\frac{\partial^{2} v}{\partial y^{2}}. \end{aligned} \qquad (3)$$

و دارای شرایط اولیه و مرزی زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} &a\le x\le b, c\le y\le d, t\ge 0,\\ &u(x,y,0)=a_1(x,y), v(x,y,0)=a_2(x,y),\\ &u(x,y,0)=b_1(x,y), v(x,y,0)=b_2(x,y). \end{aligned} \qquad (4)$$

که $\nu\left(\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2} u}{\partial y^{2}}\right),\nu\left(\frac{\partial^{2} v}{\partial x^{2}}+\nu\frac{\partial^{2} v}{\partial y^{2}}\right)$ جملات پخش و ν ضریب ویسکوزیته می‌باشد.

در واقع معادله برگرز یک معادله سهموی-هذلولوی است که امروزه به خاطر کاربرد گسترده در بسیاری از پدیده‌های فیزیکی مانند شبیه‌سازی جریان ترافیک، میرایی صوتی در مه[3] ، گاز دینامیک و موج ضربه‌ای[4] مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است [۴-۶]. تاکنون برای ارائه راه‌حل‌های دقیق و صریح برای این معادله و تعیمم آن در ابعاد بالاتر، مطالعات فراوانی انجام شده است [۷-۹]. همچنین در سال‌های اخیر تلاش‌های زیادی برای ارائه و بهبود روش‌های تحلیلی و عددی برای حل معادله برگرز صورت گرفته است [۱۰-۱۳]. معادله برگرز با معادله ناویراستوکس از لحاظ غیرخطی بودن، خواص تقارنی، روابط اتلاف انرژی و غیره شباهت دارد، اما از طرفی به دلیل وجود تبدیل کول هوپف [۱۴ و ۱۵] انتگرال‌پذیر بوده و لذا دارای خاصیت آشوبی نیست. در واقع رمز اصلی حل مسئله برگرز استفاده از تبدیل کول-هوپف یا تعمیم آن به گونه‌ای است که مسئله به یک معادله خطی منجر می‌گردد و به‌طور خودسازگار اثر شرایط مرزی در جواب‌ها وارد می‌شود [۴]. تبدیل کول-هوپف، معادله برگرز غیرخطی اولیه را به یک معادله حرارت خطی و شرایط مرزی دیریکله را به شرایط رابین تبدیل می‌کند، که علاوه بر تسریع روش عددی برای حل معادله برگرز، به حل تحلیلی معادله نیز کمک می‌کند، لذا مورد توجه بسیاری از محققان قرار می‌گیرد [۱۶] که علاوه بر حل معادله برگرز امروزه برای حل بسیاری از معادلات دیگر نیز از این تبدیل یا تعمیم آن بهره‌می‌برند. از آنجا که روش‌های ضمنی پایدار می‌باشند لذا بیشتر برای حل عددی معادلات به کار می‌روند [۱۷]؛ از جمله روش‌های ضمنی، روش تفاضل متناهی لگاریتمی[5]

---

[1] Kinematic viscosity
[2] Diffusion
[3] Acoustic attention in fog
[4] Shock wave
[5] Shock wave

(LFDM) است که مزیت اصلی آن پایداری نامشروط می‌باشد. این روش که برای حل معادله برگرز یک‌بُعدی کوپله [۱۸] و دوبُعدی کوپله [۱۹] مورد استفاده قرار گرفته است، علاوه بر معادله برگرز برای حل معادلات دیگر از جمله حل معادله kdv برگرز نیز به کار می‌رود [۲۰]. روش کرانک نیکلسون (CN) یک روش تفاضل متناهی ضمنی پایدار می‌باشد و دارای همگرایی مرتبه دوم از گام زمانی و مکانی می‌باشد، که توسط جوهان کرانک و فیلیس نیکلسون مطرح شده است [۲۱]، که برای حل عددی معادله برگرز از آن بهره‌می‌برند [۲۲]. روش دیو فرت (DF) یک روش تفاضل متناهی پایدار نامشروط می‌باشد، که در سال ۱۹۵۳ توسط دیو فرت و فرانکل برای حل عددی معادله گرما به کار رفت [۲۳]. از ترکیب دو روش کرانک-نیکلسون و روش دیو فرت و فرانکل، روش (CN-DF) به‌دست می‌آید که برای اولین بار در سال ۲۰۰۹ برای حل عددی معادله برگرز مطرح گردید [۲۴ و ۲۵]. برای حل معادله برگرز دوبُعدی نیز می‌توان از روش (CN-DF) که روشی پایدار نامشروط می‌باشد، استفاده کرد [۲۶]. در [۲۷] حل عددی معادله برگرز یک‌بُعدی، با تبدیل کول-هوپف به همراه روش آدومیان استفاده شده است. به‌علاوه برای حل عددی معادله برگرز غیرخطی یک‌بُعدی روش کرانک نیکلسون موضعی بهبود یافته[1] (MLCN) در [۲۸] پیشنهاد گردیده است. با توجه به گستردگی و کاربرد بحث مورد نظر، در مقاله حاضر به حل معادله برگرز غیرخطی یک‌بُعدی و دوبُعدی کوپله پرداخته شده است، که به کمک تبدیل غیرخطی کول-هوپف گسسته می‌شود و سپس با کمک روش عددی پیشنهادی حل می‌گردد. مزیت اصلی این روش پایداری نامشروط و همگرایی آن به جواب تحلیلی می‌باشد. نتایج عددی حاصل از این روش در نقاط مختلف نیز نشان‌دهنده کاهش خطا و تطابق جواب‌های عددی و دقیق می‌باشد.

[1] Shock wave

۲ حل عددی معادله برگرز یک‌بُعدی

جی.دی. کول و هوپف [۱۴ و ۱۵] در سال (۱۹۵۱) یک تبدیل غیرخطی برای کاهش معادله برگرز به معادله انتشار خطی را مطرح نمودند. تبدیل کول-هوپف ابزاری قوی برای حل تحلیلی و عددی معادله برگرز می‌باشد. معمولاً تبدیل کول-هوپف به‌صورت یک قضیه به فرم زیر تعریف می‌گردد [۲۲].

قضیه ۱. اگر $\phi(x,t)$ جواب معادله گرما

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}} \qquad (۵)$$

با شرایط اولیه و مرزی رابطه (۲) باشد، آنگاه تبدیل غیرخطی [کول هوپف]

$$u(x,t) = -2\nu \frac{\phi_x}{\phi}, \qquad (۶)$$

یک جواب برای $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}$ است، که دارای شرط اولیه

$$\phi(x,0) = \exp\left(-\frac{1}{2\nu}\int_{0}^{x} u_{0}(\xi)d\xi\right), \quad a \le x \le b, \qquad (۷)$$

و شرایط مرزی

$$\phi_x(1,t) = \phi_x(0,t) = 0, t \ge 0 \qquad (۸)$$

می‌باشد.

برهان: فرض کنید $\psi=\psi(x,t)$, $u=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$، لذا $\psi=-2\nu\log\phi$ پس در معادله (۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{\partial\psi_x}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi_x}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}$$
$$\Rightarrow\frac{\partial\psi_t}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}\psi_x^2)=\nu\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}),$$

با انتگرال‌گیری نسبت به x داریم:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\frac{\partial\psi}{\partial x})^2=\nu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

داریم $\psi=-2\nu\log\phi$ لذا

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-2\nu\frac{\phi_t}{\phi},\frac{\partial\psi}{\partial x}=-2\nu\frac{\phi_x}{\phi},$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-2\nu\frac{\phi_{xx}}{\phi}+2\nu\frac{\phi^2{}_x}{\phi},$$

باجایگذاری معادلات فوق خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2u}{\partial x^2},$$

که دارای شرایط اولیه و مرزی زیر می‌باشد

$$\phi(x,0)=\exp\left(-\frac{1}{2\nu}\int_0^x u_0(\xi)d\xi\right),$$
$$a\le x\le b,$$
$$\phi_x(1,t)=\phi_x(0,t)=0,t\ge0.$$

□

قضیه بالا نشان‌دهنده این است که، معادله برگرز (۱) را می‌توان به معادله خطی گرما (۵) با شرایط مرزی و اولیه (۷) و (۸) کاهش داد. حال معادله (۵) را نسبت به متغیر t در بازه $[0,T]$ را به M زیربازه گسسته‌سازی خواهیم کرد $0=t_0\le t_1\le\ldots\le t_M=T$ که $\Delta t=\dfrac{T}{M}$ می‌باشد. لذا با کمک روش تفاضل متناهی لگاریتمی ضمنی[1]، فرض می‌کنیم $A(\phi)$ تابع پیوسته مشتق‌پذیر باشد [۱۸]. آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial A}{\partial t}=A'(\phi)\left[\nu\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right],\qquad(9)$$

و فرض می‌کنیم $A(\phi)=e^{\phi}$ آنگاه داریم:

$$\phi^{n+1}=\phi^n+\log_e\left[1+\Delta t\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)^{n+1}\right].$$

در نهایت با استفاده از روش کرانک نیکلسون- دیوفرت و فرنکل[2] (CN-DF) خواهیم داشت [۲۶]:

$$\phi_i^{n+1}=\phi_i^n$$
$$=\log_e\left[1+\Delta t\left(\frac{1}{2}\left\{\frac{\phi_{i+1}^{n+1}-2\phi_i^{n+1}+\phi_{i-1}^{n+1}}{h^2}\right\}\right.\right.\qquad(10)$$
$$\left.\left.+\left\{\frac{\phi_{i+1}^{n+1}-\phi_i^{n+1}-\phi_i^{n-1}+\phi_{i-1}^{n}}{h^2}\right\}\right)\right]$$

دامنه جواب برای معادله انتشار در بازه $(i\Delta x,n\Delta t)$ و $i=0,1,2,\ldots,n_x$, $n=0,1,2,\ldots$ و $\Delta x=\dfrac{1}{n_x}$ و Δt نمایان‌گر افزایش طول گام زمان می‌باشد.

۳ حل عددی معادله برگرز دوبُعدی

در این قسمت به حل عددی معادله برگرز دوبُعدی خواهیم پرداخت، ابتدا قضیه کول-هوپف را به فرم زیر تعریف می‌کنیم [۲۹].

قضیه ۲. فرض کنید $\phi(x,y,t)$ جواب معادله گرما

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\nu(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}),\qquad(11)$$

---
[1] Implicit logarithmic finite difference method
[2] Shock wave

با شرایط اولیه و مرزی رابطه (۲) باشد، آنگاه تبدیل غیرخطی [کول هوپف]،

$$u(x,y,t) = -2\nu \frac{\phi_x}{\phi}, \quad v(x,y,t) = -2\nu \frac{\phi_y}{\phi}, \tag{12}$$

یک جواب برای

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

و دارای شرایط اولیه و مرزی زیر می‌باشد:

$$u(x,y,0) = a_1(x,y), v(x,y,0) = a_2(x,y),$$
$$u(x,y,0) = b_1(x,y), v(x,y,0) = b_2(x,y),$$

برهان. به مرجع [۳۰] مراجعه شود. □

حال معادله (۱۱) را نسبت به متغیر t در بازه $[0,T]$ را به M زیر بازه $0 = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_M = T$ گسسته‌سازی خواهیم کرد که $\Delta t = \frac{T}{M}$ می‌باشد. فرض کنیم $B(\Phi)$ تابع پیوسته مشتق‌پذیر باشند. آنگاه معادله (۱۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = B'(\phi)\nu\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right).$$

فرض می‌کنیم $B(\phi) = e^{\phi}$ آنگاه داریم [۱۹]:

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^{n} = \log_e\left[1 + \Delta t\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{i,j}^{n+1}\right].$$

حال با استفاده از روش کرانک نیکلسون- دیوفرت و فرنکل (CN-DF) می‌توان معادله پخش خطی را به فرم زیر تبدیل کنیم [۲۶]:

$$\begin{aligned}\phi_{i,j}^{n+1} &= \phi_{i,j}^{n} \\ &= \log_e\Bigg[1 + \frac{1}{2}\Delta t\Bigg(\left\{\frac{\phi_{i+1,j}^{n+1} - 2\phi_{i,j}^{n+1} + \phi_{i-1,j}^{n+1}}{h^2}\right\} \\ &\quad + \left\{\frac{\phi_{i+1,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n-1} + \phi_{i-1,j}^{n}}{h^2}\right\} \\ &\quad + \left\{\frac{\phi_{i,j+1}^{n+1} - 2\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j-1}^{n-1}}{h^2}\right\} \\ &\quad + \left\{\frac{\phi_{i,j+1}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n-1} + \phi_{i,j-1}^{n}}{h^2}\right\}\Bigg)\Bigg]\end{aligned}$$

دامنه جواب برای معادله انتشار در بازه $(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$، $i = 0,1,2,\ldots,n_x$ و $j = 0,1,2,\ldots n_y$ که $n = 0,1,2,\ldots$ و $\Delta x = \frac{1}{n_x}, \Delta y = \frac{1}{n_y}$ و Δt نشان‌گر افزایش طول گام زمان می‌باشد.

۴ تشریح مثال‌های عددی

برای نشان دادن دقت و کارایی روش عددی پیشنهادی به ارائه دو مثال که به مقایسه جواب عددی و تحلیلی در نقاط گره‌ای مختلف می‌باشد، خواهیم پرداخت.

مثال ۱. معادله برگرز یک‌بُعدی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

شرایط اولیه و مرزی آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$u(x,0) = \sin(\pi x), 0 \le x \le 1,$$

$$u(0,t) = 0 = u(1,t), 0 \le t \le T$$

دارای حل تحلیلی زیر است [۲۲]:

$$u(x,t) = 2\pi\nu \frac{\sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-n^2\pi^2\nu t)\, n\sin(n\pi x)}{C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-n^2\pi^2\nu t)\, n\cos(n\pi x)},$$

که در آن ضرایب C_0, C_n به فرم زیر تعریف می‌گردد:

$$C_0 = \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{2\pi\nu}\left[1-\cos(\pi x)\right] \right\} dx,$$

$$C_n = 2\int_0^1 \left\{ -\frac{1}{2\pi\nu}\left[1-\cos(\pi x)\right]\cos(n\pi x) \right\} dx.$$

در ادامه، با ارائه جداولی جواب تحلیلی و عددی به‌دست آمده در نقاط گره‌ای مختلف و مقادیر ویسکوزیته سینماتیک متفاوت بررسی شده است.

جدول ۱. جواب عددی و تحلیلی در $\Delta t = 0.001, \nu = 1, T = 0.5$

جواب تحلیلی	جواب عددی				X
	$N=100$	$N=80$	$N=40$	$N=20$	
۲.۲۱۳E−۰۳	۲.۲۱۳E−۰۳	۲.۲۱۳E−۰۳	۲.۲۱۴E−۰۳	۲.۲۲۰E−۰۳	۰.۱
۴.۲۱۰E−۰۳	۴.۲۰۹E−۰۳	۴.۲۱۱E−۰۳	۴.۲۱۵E−۰۳	۴.۲۳۲E−۰۳	۰.۲
۵.۷۹۶E−۰۳	۵.۷۹۵E−۰۳	۵.۷۹۴E−۰۳	۵.۸۰۲E−۰۳	۵.۸۲۷E−۰۳	۰.۳
۶.۸۱۶E−۰۳	۶.۸۱۵E−۰۳	۶.۸۱۶E−۰۳	۶.۸۲۳E−۰۳	۶.۸۵۱E−۰۳	۰.۴
۷.۱۶۹E−۰۳	۷.۱۶۷E−۰۳	۷.۱۶۹E−۰۳	۷.۱۷۸E−۰۳	۷.۲۰۸E−۰۳	۰.۵
۶.۸۲۱E−۰۳	۶.۸۲۰E−۰۳	۶.۸۲۱E−۰۳	۶.۸۲۸E−۰۳	۶.۸۵۹E−۰۳	۰.۶
۵.۸۰۴E−۰۳	۵.۸۰۳E−۰۳	۵.۸۰۳E−۰۳	۵.۸۱۱E−۰۳	۵.۸۷۳E−۰۳	۰.۷
۴.۲۱۸E−۰۳	۴.۲۱۷E−۰۳	۴.۲۱۸E−۰۳	۴.۲۲۲E−۰۳	۴.۲۴۱E−۰۳	۰.۸
۲.۲۱۸E−۰۳	۲.۲۱۸E−۰۳	۲.۲۱۸E−۰۳	۲.۲۲۰E−۰۳	۲.۲۲۸E−۰۳	۰.۹

نتایج ارائه شده در جدول ۱ نشانگر این است که در زمان $\Delta t = 0.001, T = 0.5$ با ضریب ویسکوزیته $\nu = 1$ با افزایش تعداد نقاط گره‌ای جواب تحلیلی به جواب عددی نزدیک بوده، لذا خطای نتایج به‌دست آمده با روش ارائه شده بسیار ناچیز بوده و تقریباً تطابق کامل بین جواب عددی و تحلیلی وجود دارد.

با توجه به نتایج ارائه شده جدول ۲ که $\Delta t = 0.0001, \nu = 10, T = 0.1$ و جدول ۳ که $\Delta t = 0.001, \nu = 1, T = 0.6$ می‌باشد، واضح است که جواب عددی در نقاط گره‌ای مختلف با جواب تحلیلی توافق خوبی دارد. لذا با افزایش تعداد نقاط گره‌ای از ۲۰ به ۱۰۰ این نتایج بهتر شده و به بیان دیگر، نتایج حاصل از روش ارائه شده خطای کمتری با جواب تحلیلی دارند.

در جدول ۴ نیز نتایج عددی و تحلیلی در نقاط مختلف از مکان و زمان $\Delta t = 0.001, \nu = 0.1, \Delta x = 0.01$ ارائه شده است، که نشان دهنده توافق خوب این نتایج با جواب تحلیلی می‌باشد؛ لذا با توجه به جداول قبلی و جدول ۴ روش عددی ارائه شده نتایج دقیقی را ارائه می‌دهد.

جدول ۲. جواب عددی و تحلیلی در $T=۰.۱, \nu=۱۰, \Delta t=۰.۰۰۰۱$

X	جواب عددی $N=۲۰$	$N=۴۰$	$N=۸۰$	$N=۱۰۰$	جواب تحلیلی
۰.۱	$۱.۶۲۳E-۰۵$	$۱.۶۰۳E-۰۵$	$۱.۵۹۸E-۰۵$	$۱.۵۹۸E-۰۵$	$۱.۵۹۸E-۰۵$
۰.۲	$۳.۰۸۷E-۰۵$	$۳.۰۵۰E-۰۵$	$۳.۰۴۱E-۰۵$	$۳.۰۳۹E-۰۵$	$۳.۰۴۰E-۰۵$
۰.۳	$۴.۲۴۹E-۰۵$	$۴.۱۹۸E-۰۵$	$۴.۱۸۵E-۰۵$	$۴.۱۸۳E-۰۵$	$۴.۱۸۴E-۰۵$
۰.۴	$۴.۹۹۵E-۰۵$	$۴.۹۳۵E-۰۵$	$۴.۲۰۰E-۰۵$	$۴.۹۱۸E-۰۵$	$۴.۹۱۹E-۰۵$
۰.۵	$۵.۲۵۲E-۰۵$	$۵.۱۸۹E-۰۵$	$۵.۱۷۳E-۰۵$	$۵.۱۷۱E-۰۵$	$۵.۱۷۲E-۰۵$
۰.۶	$۴.۹۹۵E-۰۵$	$۴.۹۳۵E-۰۵$	$۴.۹۲۰E-۰۵$	$۴.۹۱۸E-۰۵$	$۴.۹۱۹E-۰۵$
۰.۷	$۴.۲۴۹E-۰۵$	$۴.۱۹۸E-۰۵$	$۴.۱۸۵E-۰۵$	$۴.۱۸۳E-۰۵$	$۴.۱۸۴E-۰۵$
۰.۸	$۳.۰۸۷E-۰۵$	$۳.۰۵۰E-۰۵$	$۳.۰۴۱E-۰۵$	$۳.۰۳۹E-۰۵$	$۳.۰۴۰E-۰۵$
۰.۹	$۱.۶۲۳E-۰۵$	$۱.۶۰۳E-۰۵$	$۱.۵۹۸E-۰۵$	$۱.۵۹۸E-۰۵$	$۱.۵۹۸E-۰۵$

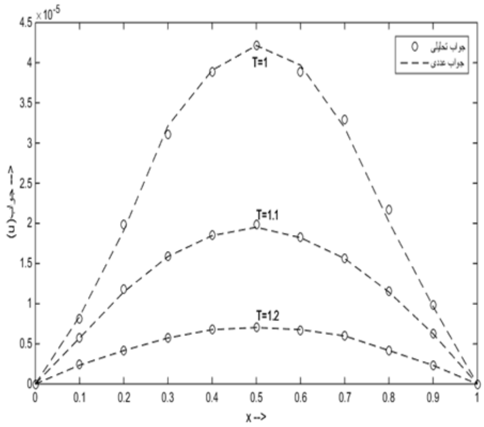
جدول ۳. جواب عددی و تحلیلی در $T=۰.۶, \nu=۱, \Delta t=۰.۰۰۱$

X	جواب عددی $N=۲۰$	$N=۴۰$	$N=۸۰$	$N=۱۰۰$	جواب تحلیلی
۰.۱	$۲.۲۵۳E-۰۲$	$۲.۲۵۳E-۰۲$	$۲.۲۵۳E-۰۲$	$۲.۲۵۳E-۰۲$	$۲.۲۱۴E-۰۲$
۰.۲	$۴.۳۵۷E-۰۲$	$۴.۳۵۷E-۰۲$	$۴.۳۵۷E-۰۲$	$۴.۳۵۷E-۰۲$	$۴.۲۸۰E-۰۲$
۰.۳	$۶.۱۵۶E-۰۲$	$۶.۱۵۵E-۰۲$	$۶.۱۵۵E-۰۲$	$۶.۱۵۵E-۰۲$	$۶.۰۴۳E-۰۲$
۰.۴	$۷.۴۸۷E-۰۲$	$۷.۴۸۵E-۰۲$	$۷.۴۸۵E-۰۲$	$۷.۴۸۵E-۲$	$۷.۳۴۴E-۰۲$
۰.۵	$۸.۱۸۶E-۰۲$	$۸.۱۸۳E-۰۲$	$۸.۱۸۲E-۰۲$	$۸.۱۸۲E-۰۲$	$۸.۰۲۳E-۰۲$
۰.۶	$۸.۱۰۹E-۰۲$	$۸.۱۰۵E-۰۲$	$۸.۱۰۴E-۰۲$	$۸.۱۰۴E-۰۲$	$۷.۹۴۰E-۰۲$
۰.۷	$۷.۱۶۷E-۰۲$	$۷.۱۶۲E-۰۲$	$۷.۱۶۱E-۰۲$	$۷.۱۶۱E-۰۲$	$۷.۰۱۱E-۰۲$
۰.۸	$۵.۳۷۳E-۰۲$	$۵.۳۶۹E-۰۲$	$۵.۳۶۸E-۰۲$	$۵.۳۶۸E-۰۲$	$۵.۲۵۲E-۰۲$
۰.۹	$۵.۳۷۳E-۰۲$	$۵.۳۶۹E-۰۲$	$۵.۳۶۸E-۰۲$	$۵.۳۶۸E-۰۲$	$۵.۲۵۲E-۰۲$

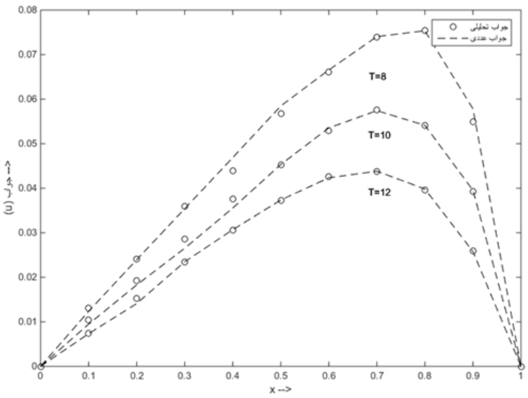
جدول ۴. جواب عددی و تحلیلی در $\Delta x=۰.۰۱, \nu=۰.۱, \Delta t=۰.۰۰۱$

x	T	جواب عددی	جواب تحلیلی
۰.۰۲۵	۲.۴	$۴.۷۵۵E-۰۲$	$۴.۷۵۵E-۰۲$
	۲.۶	$۳.۹۵۵E-۰۲$	$۳.۹۵۵E-۰۲$
	۳.۰	$۲.۷۲۰E-۰۲$	$۲.۷۲۰E-۰۲$
۰.۵۰	۲.۴	$۷.۲۶۸E-۰۲$	$۷.۲۶۹E-۰۲$
	۲.۶	$۵.۹۶۶E-۰۲$	$۵.۹۶۷E-۰۲$
	۳.۰	$۴.۰۲۰E-۰۲$	$۴.۰۲۰E-۰۲$
۰.۷۵	۲.۴	$۵.۵۹۳E-۰۲$	$۵.۵۹۳E-۰۲$
	۲.۶	$۴.۵۲۰E-۰۲$	$۴.۵۲۱E-۰۲$
	۳.۰	$۲.۹۷۷E-۰۲$	$۲.۹۷۷E-۰۲$

در شکل ۱ نتایج عددی و تحلیلی معادله برگرز یک‌بُعدی در $\nu=۱$ در سه زمان مختلف برای $T=۱,\ T=۱.۱,\ T=۱.۲$ و شکل ۲ جواب تحلیلی و عددی برای $\nu=۰.۰۰۵$ در سه زمان مختلف برای $T=۸, T=۱۰, T=۱۲$ نشان داده شده است.



شکل ۱. جواب عددی و تحلیلی در $\nu=۱, \Delta t=۰.۰۰۰۱$



شکل ۲. جواب عددی و تحلیلی در $\nu=۰.۰۰۵, \Delta t=۰.۰۱$

نتایج نشان می‌دهد که با تغییر مقدار زمان، جواب به دست آمده نیز متفاوت خواهد بود و با دقت به شکل‌ها می‌یابیم که نتایج عددی با نتایج تحلیلی در همان نقاط گره‌ای نزدیک بوده و در بعضی نقاط تقریباً جواب‌ها مطابق جواب‌های تحلیلی می‌باشند، لذا این خطوط روی هم منطبق می‌گردند. دقت در روش عددی با استفاده از نرم $L_۲$ و L_∞ تعیین می‌گردد، لذا داریم:

$$\left\|u^\alpha-u\right\|_۲=(\mathrm{h}\sum_{i=۱}^{N}(\mathrm{u}_{i,n}-\mathrm{u}(\mathrm{x}_i,\mathrm{T})))^{\frac{۱}{۲}},$$

$$\left\|u^\alpha-u\right\|_\infty=Max_{۱\le i\le N}\left|\mathrm{u}_{i,\mathrm{M}}-\mathrm{u}(\mathrm{x}_i,\mathrm{T})^۲\right|,$$

که u^α تقریبی از جواب و u جواب تحلیلی و $\mathrm{u}_{i,\mathrm{M}}=u(\mathrm{x}_i,\mathrm{T}_M)$ جواب تقریبی در $t_M=T, x=x_i$ و $\mathrm{u}(\mathrm{x}_i,\mathrm{T})$ جواب تحلیلی در $\mathrm{x}=\mathrm{x}_i$ و زمان پایانی T می‌باشد. جدول زیر محاسبه خطا برای مقادیر مختلف از $\Delta t, T, \nu$ می‌باشد.

جدول ۵. محاسبه خطا روی نرم L_∞ و $L_۲$ برای مقادیر مختلف از T و $\mathrm{N}=۸۰$.

$\Delta t=۰.۰۰۱, \nu=۱$	$T=۲$		$T=۱$	
	$L_۲$	L_∞	$L_۲$	L_∞
جواب	$۹.۷۵۵۲E-۱۳$	$۶.۹۲۸۵E-۱۳$	$۶.۸۱۲۷E-۰۹$	$۴.۸۱۷۳E-۰۹$
$\Delta t=۰.۰۱, \nu=۰.۱$	$T=۳$		$T=۳.۵$	
	$L_۲$	L_∞	$L_۲$	L_∞
جواب	$۱.۵۲۶۳E-۰۶$	$۲.۱۸۹۲E-۰۶$	$۷.۰۴۲۲E-۰۷$	$۱.۰۰۸۵E-۰۶$

مثال ۲. در این مثال به حل عددی معادله دوبُعدی برگرز با روش پیشنهادی می‌پردازیم و جواب تحلیلی حاصل از تبدیل کول-هوپف را با جواب عددی مقایسه خواهیم نمود. معادله دوبُعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\nu\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=\nu\frac{\partial^۲ v}{\partial x^۲}+\nu\frac{\partial^۲ v}{\partial y^۲},$$

و دارای شرایط اولیه زیر می‌باشد (شرایط مرزی نیز با معادله بالا و با تغییر زمان t مشخص‌شده است):

$$u(x,y,۰)=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۴}(۱+\exp(\frac{-x+y}{۸\nu}))^{-۱},$$

$$\mathrm{v}(x,y,۰)=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}(۱+\exp(\frac{-x+y}{۸\nu}))^{-۱},$$

حل تحلیلی معادله فوق نیز به‌صورت زیر می‌باشد [۳۱]:

$$u(x,y,\mathrm{t})=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۴}(۱+\exp(\frac{-۴x+۴y-t}{۳۲\nu}))^{-۱},$$

$$\mathrm{v}(x,y,\mathrm{t})=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}(۱+\exp(\frac{-۴x+۴y-t}{۳۲\nu}))^{-۱},$$

در جدول‌های ۶ و ۷ که برای گام زمانی $T=۰.۵,۰.۰۵;\ \Delta t=۰.۰۰۵$ می‌باشد، دیده می‌شود که هر چه عدد رینولدز بیشتر باشد دقت روش بالا می‌رود و در همین جدول‌ها برای گام زمانی مختلف مسئله را بررسی کرده‌ایم که دیده می‌شود در گام زمانی کوچک‌تر دقت روش بالا می‌رود.

جدول ۶. مقایسه و محاسبه جواب عددی *u(x,y,t)* با جواب تحلیلی در نقاط گره‌ای مختلف در $\nu=۰.۰۱$;$\Delta t=۰.۰۰۵$

نقاط گره‌ای	$T=۰.۵$		$T=۰.۰۵$	
	حل تحلیلی	حل عددی	حل تحلیلی	حل عددی
(۰.۱,۰.۱)	۰.۵۵۵۷	۰.۵۵۵۵	۰.۶۱۷۲	۰.۶۱۷۹
(۰.۱,۰.۳)	۰.۶۶۹۸	۰.۶۶۹۶	۰.۷۱۶۸	۰.۷۱۵۵
(۰.۱,۰.۵)	۰.۷۳۵۰	۰.۷۳۴۸	۰.۷۴۴۹	۰.۷۴۵۴
(۰.۲,۰.۷)	۰.۷۴۴۳	۰.۷۴۴۳	۰.۷۴۸۱	۰.۷۴۷۵
(۰.۹,۰.۲)	۰.۵۰۰۱	۰.۵۰۰۰	۰.۵۰۰۲	۰.۵۱۲۲
(۰.۳,۰.۸)	۰.۷۴۴۳	۰.۷۴۴۲	۰.۷۴۸۱	۰.۷۴۸۱
(۰.۷,۰.۴)	۰.۵۰۳۵	۰.۵۰۳۴	۰.۵۱۰۴	۰.۵۱۱۴
(۰.۵,۰.۹)	۰.۷۳۵۰	۰.۷۳۴۸	۰.۷۴۴۹	۰.۷۴۴۹
(۰.۶,۰.۱)	۰.۵۰۰۵	۰.۵۰۰۳	۰.۵۱۰۴	۰.۵۰۲۵
(۰.۷,۰.۳)	۰.۵۰۱۳	۰.۵۰۱۲	۰.۵۰۴۰	۰.۵۰۳۷
(۰.۴,۰.۷)	۰.۷۱۳۰	۰.۷۱۲۸	۰.۷۳۶۶	۰.۷۳۴۹
(۰.۶,۰.۸)	۰.۶۶۹۸	۰.۶۶۹۶	۰.۷۱۶۸	۰.۷۱۶۷
(۰.۱,۰.۹)	۰.۷۴۹۷	۰.۷۴۹۷	۰.۷۴۹۹	۰.۷۴۸۹
(۰.۹,۰.۹)	۰.۵۵۵۷	۰.۵۵۵۵	۰.۶۱۷۲	۰.۶۱۸۱

جدول ۷. مقایسه و محاسبه جواب عددی *v(x,y,t)* با جواب تحلیلی در نقاط گره‌ای مختلف در $\nu=۰.۰۱$;$\Delta t=۰.۰۰۵$

نقاط گره‌ای	$T=۰.۵$		$T=۰.۰۵$	
	حل تحلیلی	حل عددی	حل تحلیلی	حل عددی
(۰.۱,۰.۱)	۰.۹۴۴۳	۰.۹۴۳۸	۰.۸۸۲۸	۰.۸۸۳۸
(۰.۱,۰.۳)	۰.۸۳۰۲	۰.۸۲۹۸	۰.۷۸۳۲	۰.۷۸۲۲
(۰.۱,۰.۵)	۰.۷۶۵۰	۰.۷۶۴۹	۰.۷۵۵۱	۰.۷۵۴۰
(۰.۲,۰.۷)	۰.۷۵۵۷	۰.۷۴۹۸	۰.۷۵۱۹	۰.۷۵۲۹
(۰.۹,۰.۲)	۰.۹۹۹۹	۰.۹۹۸۷	۰.۹۹۹۸	۰.۹۹۹۷
(۰.۳,۰.۸)	۰.۷۵۵۷	۰.۷۷۸۰	۰.۷۵۱۹	۰.۷۵۱۸
(۰.۷,۰.۴)	۰.۹۹۶۵	۰.۹۹۶۴	۰.۹۸۹۵	۰.۹۸۹۶
(۰.۵,۰.۹)	۰.۷۶۵۰	۰.۷۶۴۲	۰.۷۵۵۱	۰.۷۴۸۹
(۰.۶,۰.۱)	۰.۹۹۹۵	۰.۹۹۸۵	۰.۹۹۸۵	۰.۹۹۸۹
(۰.۷,۰.۳)	۰.۹۹۸۷	۰.۹۹۷۵	۰.۹۹۶۰	۰.۹۹۴۹
(۰.۴,۰.۷)	۰.۷۸۷۰	۰.۷۸۷۲	۰.۷۶۳۴	۰.۷۶۳۵
(۰.۶,۰.۸)	۰.۸۳۰۲	۰.۸۳۰۸	۰.۷۸۳۲	۰.۷۸۴۴
(۰.۱,۰.۹)	۰.۷۵۰۳	۰.۷۵۱۲	۰.۷۵۰۱	۰.۷۵۲۰
(۰.۹,۰.۹)	۰.۹۴۴۳	۰.۹۴۳۸	۰.۸۸۲۸	۰.۸۶۹۸

از جواب عددی ارائه شده در جداول، دیده می‌شود که دقت روش بالا می‌باشد.

جدول ۸. مقایسه و محاسبه جواب عددی $u(x,y,t)$ با جواب تحلیلی در نقاط گره‌ای مختلف در $\nu =$ ۱؛ $\Delta t =$ ۰.۰۰۵

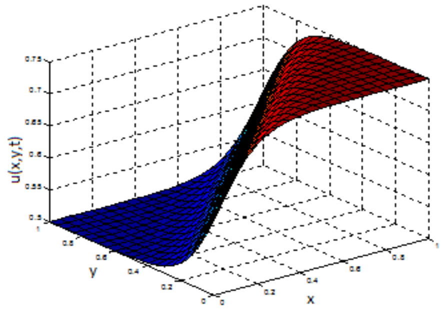
نقاط گره‌ای	$T =$ ۰.۰۵		$T =$ ۰.۵	
	حل عددی	حل تحلیلی	حل عددی	حل تحلیلی
(۰.۱,۰.۱)	۰.۶۲۳۷	۰.۶۲۴۹	۰.۶۲۳۷	۰.۶۲۴۰
(۰.۱,۰.۳)	۰.۶۳۶۰	۰.۶۳۶۵	۰.۶۲۴۳	۰.۶۲۵۶
(۰.۱,۰.۵)	۰.۶۱۲۰	۰.۶۲۸۰	۰.۶۲۰۱	۰.۶۲۷۱
(۰.۲,۰.۷)	۰.۶۱۸۵	۰.۶۲۸۸	۰.۶۱۸۰	۰.۶۲۷۹
(۰.۹,۰.۲)	۰.۶۲۰۱	۰.۶۱۹۴	۰.۶۱۸۷	۰.۶۱۸۶
(۰.۳,۰.۸)	۰.۶۲۸۸	۰.۶۲۸۸	۰.۶۲۷۳	۰.۶۲۷۹
(۰.۷,۰.۴)	۰.۶۲۲۴	۰.۶۲۲۶	۰.۶۲۱۵	۰.۶۲۱۷
(۰.۵,۰.۹)	۰.۶۲۷۴	۰.۶۲۸۰	۰.۶۲۶۹	۰.۶۲۷۱
(۰.۶,۰.۱)	۰.۶۲۲۰	۰.۶۲۱۰	۰.۶۲۰۰	۰.۶۲۰۱
(۰.۷,۰.۳)	۰.۶۲۲۰	۰.۶۲۱۸	۰.۶۲۱۱	۰.۶۲۰۱
(۰.۴,۰.۷)	۰.۶۲۷۱	۰.۶۲۷۲	۰.۶۲۶۴	۰.۶۲۰۹
(۰.۶,۰.۸)	۰.۶۲۶۵	۰.۶۲۶۵	۰.۶۲۲۰	۰.۶۲۶۴
(۰.۱,۰.۹)	۰.۶۲۹۸	۰.۶۳۱۱	۰.۶۲۹۰	۰.۶۲۵۶
(۰.۹,۰.۹)	۰.۶۲۳۹	۰.۶۲۴۹	۰.۶۲۳۶	۰.۵۵۵۷

جدول ۹. مقایسه و محاسبه جواب عددی $v(x,y,t)$ با جواب تحلیلی در نقاط گره‌ای مختلف در $\nu =$ ۱، $\Delta t =$ ۰.۰۰۵

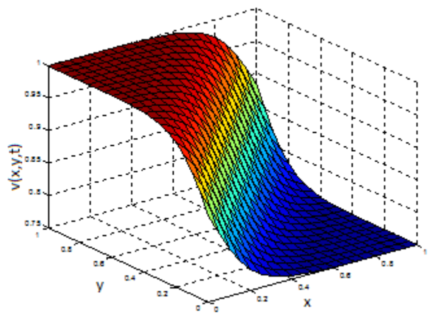
نقاط شبکه	$t =$ ۰.۰۵		$t =$ ۰.۵	
	حل عددی	حل تحلیلی	حل عددی	حل تحلیلی
(۰.۱,۰.۱)	۰.۸۵۷۷	۰.۸۷۴۷	۰.۸۷۴۹	۰.۸۷۶۰
(۰.۱,۰.۳)	۰.۸۲۸۵	۰.۸۷۴۵	۰.۸۷۲۰	۰.۸۷۴۴
(۰.۱,۰.۵)	۰.۸۵۱۶	۰.۸۷۱۶	۰.۸۷۱۷	۰.۸۷۲۹
(۰.۲,۰.۷)	۰.۸۷۴۸	۰.۸۶۵۸	۰.۸۷۲۰	۰.۸۷۲۱
(۰.۹,۰.۲)	۰.۸۸۸۰	۰.۸۸۱۰	۰.۸۸۰۸	۰.۸۸۱۴
(۰.۳,۰.۸)	۰.۸۷۳۵	۰.۸۷۱۵	۰.۸۷۱۵	۰.۸۷۲۱
(۰.۷,۰.۴)	۰.۸۷۴۰	۰.۸۷۵۰	۰.۸۷۳۹	۰.۸۷۸۳
(۰.۵,۰.۹)	۰.۸۷۴۴	۰.۸۷۰۴	۰.۸۷۲۵	۰.۸۷۲۹
(۰.۶,۰.۱)	۰.۸۷۸۰	۰.۸۷۳۰	۰.۸۷۸۵	۰.۸۷۹۹
(۰.۷,۰.۳)	۰.۸۶۸۰	۰.۸۷۵۰	۰.۸۷۸۶	۰.۸۷۹۱
(۰.۴,۰.۷)	۰.۸۸۴۱	۰.۸۷۱۱	۰.۸۷۴۵	۰.۸۷۳۶
(۰.۶,۰.۸)	۰.۸۸۷۲	۰.۸۷۰۲	۰.۸۵۸۰	۰.۸۷۴۴
(۰.۱,۰.۹)	۰.۸۶۷۱	۰.۸۶۹۱	۰.۸۶۹۹	۰.۸۶۹۷
(۰.۹,۰.۹)	۰.۸۷۶۶	۰.۸۷۴۶	۰.۸۷۵۵	۰.۵۷۶۰

در جدول‌های مربوط به جواب‌های به‌دست‌آمده دیده می‌شود که روش ارائه شده بهتر عمل می‌کند، لذا جواب بسیار نزدیکی به جواب تحلیلی به‌دست می‌آورد.

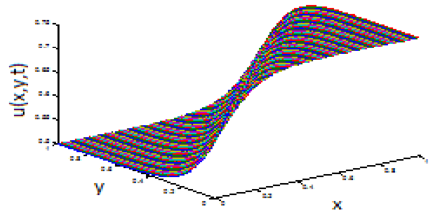
شکل‌های ۳ و ۴ تقریبی از روش عددی و شکل‌های ۵ و ۶ نیز جواب تحلیلی برای $u(x,y,t),v(x,y,t)$ در گام زمانی $T=0.05$ نشان می‌دهد.



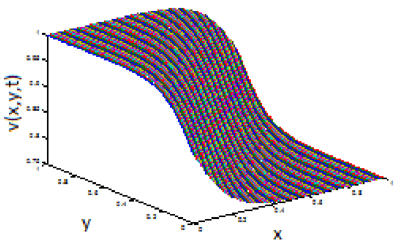
شکل ۳. جواب عددی $u(x,y,t)$ در $\Delta t = 0.01; T = 0.05; \nu = 0.01$.



شکل ۴. جواب عددی $v(x,y,t)$ در $\Delta t = 0.01; T = 0.05; \nu = 0.01$.



شکل ۵. جواب تحلیلی $u(x,y,t)$ در $\Delta t = 0.01; T = 0.05; \nu = 0.01$.



شکل ۶. جواب تحلیلی $v(x,y,t)$ در $\Delta t = 0.01; T = 0.05; \nu = 0.01$.

برای به‌دست آوردن خطای روش عددی نیز نرم خطا به فرم زیر تعریف می‌گردد، که با استفاده از آن به محاسبه میزان خطای نتایج عددی با جواب تحلیلی می‌پردازیم.

$$E := \left(\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left(\left|u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{computed}\right|\right)^2}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left(\left|u_{i,j}^{exact}\right|\right)^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

در جدول ۱۰ به محاسبه خطا در گام زمانی و عدد ویسکوزیته مختلف پرداخته شده است. با توجه به جدول فوق و جداول قبلی و شکل‌های ارائه شده برای هر دو مثال، به این موضوع می‌توان پی برد که روش ارائه شده روشی کارامد بوده که نتایج حاصل از آن به جواب تحلیلی نزدیک می‌باشد.

جدول ۱۰. محاسبه خطا برای مقادیر مختلف از $\Delta t; \nu$

$\nu =$ ۰.۱, $T =$ ۱.۰		
Δt	u-component error	v-component error
۰.۰۱	۸.۴۵۲$E -$۰۰۴	۴.۹۹۲$E -$۰۰۴
۰.۰۰۱	۲.۱۹۰$E -$۰۰۴	۱.۵۸۲$E -$۰۰۴
۰.۰۰۰۱	۹.۱۴۶$E -$۰۰۶	۶.۱۹۹$E -$۰۰۶
$\Delta t =$ ۰.۰۱, T = ۱.۰		
ν	u-component error	v-component error
۰.۱	۸.۴۵۳$E -$۰۰۴	۴.۹۹۲$E -$۰۰۴
۰.۰۱	۳.۲۷۰$E -$۰۰۳	۲.۴۲۱$E -$۰۰۳
۰.۰۰۵	۱.۳۶۵$E -$۰۰۳	۹.۱۲۶$E -$۰۰۳

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله نتایج حاصل از حل عددی معادله برگرز غیرخطی یک‌بُعدی و دوبُعدی در شرایط مختلف مورد بررسی قرار گرفت. با روش تفاضل متناهی لگاریتمی مشتق زمان معادله انتشار به‌دست آمده از تبدیل غیرخطی را گسسته نموده و برای مشتق دوم مکان از روش کرانک نیکلسون دیو فورت و فرانکل استفاده نمودیم. نتایج حاصل از روش عددی مطرح شده برای مثال‌های ارائه شده، با تغییر گام مکانی، زمانی و عدد ویسکوزیته، نشان‌دهنده نزدیکی جواب‌های به‌دست آمده به جواب دقیق می‌باشد. مقایسه مقادیر به‌دست آمده از حل عددی در جداول، نمودارها و بررسی اندازه خطا با جواب تحلیلی کارامد بودن روش ارائه شده را بیان می‌کند.

References

[1] A.C. Eringen, Theory of micro fluids, J. Appl. Math. Mech., (1966) 1-18.

[2] H. Bateman, Some recent research on the motion of fluids, Monthly Weather Review, 43 (1915) 163-170.

[3] S.E. Esipov, Coupled Burgers’ equations: a model of poly-dispersive sedimentation, Physical Rev. E, 52 (1995) 3711-3718.

[4] N. Su, P.C. Watt, K.W. Vincent, M. E. Close, R. Mao, Analysis of turbulent flow patterns of soil water under filed conditions using Burgers’ equation and porous suction-cup samplers, Aust. J. Soil Res., 42 (2004) 9-16.

[5] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal, Interaction of solitons in a collision less plasma and the recurrence of initial states, Physical Rev. J. Archive, 15 (1996) 274-243.

[6] P.F. Zhao, M.Z. Qin, Multi geometry and multisymplectic preissmann scheme for the KdV equation, J. Phys. A, 33 (2000) 3613-3626.

[7] M.C. Kweyu, W.A. Manyonge, A. Koross, V. Semaganda, Numerical Solutions of the Burgers System in Two-Dimensions under Varied Initial and Boundary Conditions, Appl. Math. Sci., 6 (2012) 5603-5615.

[8] A.A. Soliman, The modified extended tanh-function method for solving Burgers-type equations, J. Phys. A, 361 (2006): 394.

[9] G.W. Wei, Y. Gu, Conjugate filter approach for solving Burgers’ equation, Appl. Math. Comput., 149 (2002) 439.

[10] N. Bressan, A. Quarteroni, An implicit/explicit spectra method for Burgers' equation, Calcolo, 23 (1986) 265-284.

[11] T. Özis, A. Esen, S. Kutlay, Numerical solution of Burgers equation by B-Spline finite elements, Appl. Math. Comput., 165 (2005) 237-249.

[12] T. Özis, E.N. Aksan, A.Ozdes, A finite element for solution of Burgers equation, Appl. Math. Comput., 139 (2003) 417-428.

[13] K. Pandey, L. Verma, A.K. Verma, On a finite difference scheme for Burgers equation, Appl. Math. Comput., 215 (2009) 2206-2214.

[14] J.D. Cole, On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics, Appl. Math. Comput., 9 (1972) 225-236.

[15] E. Hopf, The partial differential equation $\boldsymbol{u_t + uu_x = u_{xx}}$, Commun. Pure Appl. Math. J., 3 (1950) 201-230.

[16] K.T. Joseph, A.S. Vasudeva Murthy, Hopf-Cole transformation to some systems of partial differential equations, Nonlinear Differ. Eq. Appl. NoDEA, 8 (2001) 173-193.

[17] V.K. Srivastava, S. Singh, M.K. Awasthi, Numerical solution of coupled Burgers' equation by an implicit finite difference scheme, AIP Advances, 3 (2013): 082131.

[18] V.K. Srivastava, M. Tamsir, M.K. Awasthi, S. Singh, One-dimensional coupled Burgers' equation and its numerical solution by an implicit logarithmic finite-difference method, AIP Advances, 4 (2014): 037119.

[19] V.K. Srivastava, M.K. Awisthi, S. Singh, An implicit logarithmic finite-difference technique for two dimensional coupled viscous Burgers' equation, AIP Advances, 3 (2013) 122105-122109.

[20] S.A. El Morsy, M.S. El-Azab, Logarithmic finite difference method applied to KdVB equation, Amer. Acad. & Scholarly Res. J., 4 (2012): 2.

[21] J. Crank, P. Nicolson, A practical method for numerical evaluation of partial differential equation of the heat conduction type, Math. Proc. Cambridge Philosophical Soc., 1 (1947) 50-67.

[22] M.K. Kadalbajoo, A. Awasthi, A numerical method based on Crank-Nicolson scheme for Burgers' equation, Appl. Math. Comput., 182 (2006) 1430-1442.

]23] E.C. Du Fort, S.P. Frankel, Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equation, Mathematical table and other aids to computation, 7 (1953) 135-152.

[24] K. Alfred, O.M.E. Okoya, O. Ongati, Hybrid finite difference schemes from operator splitting for solving Burgers equation, J. Agrriculture, Pure Appl. Sci. Tech., 1 (2009) 45-52.

[25] K. Pandey, V. Lajja, K.V. Amit, Du Fort-Frankel finite difference scheme for Burgers equation, Arab j. Math., 2 (2012) 91-101.

[26] K. Cleophas, N. Benjamin, W. John, Hybrid Crank- Nicolson-Du Fort and Frannkel (CN-DF) scheme for the numerical solution of the 2-D coupled Burgers system, Appl. Math. Sci., 8 (2014) 2353-2361.

[27] A.R. Haghighi, M. Shojaeifard, Numerical solution of the one dimensional non-linear Burgers equation using the Adomian decomposition method and the comparison between the modified Local Crank-Nicolson method and the VIM exact solution, Int. J. Indust. Math., 2 (2015) 149-159.

[28] A.R. Haghighi, S. Pakrou, A comparison of the LBM whit the modified local Crank- Nicolson method solution of transient one-dimensional non-linear Burgers equation, Int. J. Comput. Sci. Math., 7 (2016) 459-466.

[29] C.A.J. Fletcher, Generating exact solutions of the two-dimensional Burgers' equation, Int. J. Modern Math. Sci., 5 (2013) 1-13.

[30] T. Özis, Y. Aslan, The semi-approximate approach for solving Burgers' equation with high Reynolds number, Appl. Math. Comput., 163 (2005) 131-145.

[31] V.K. Srivastava, M.T. Ashutosh, Generating exact solution of three dimensional coupled unsteady nonlinear generalized viscous Burgers' equations, Int. J. Modern Math. Sci., 5 (2013) 1-13.